Décroissance non uniforme de l'énergie pour une classe de systèmes dissipatifs

Ahmed Bchatnia

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Tunis
Université de Tunis El Manar

Plan de la présentation

- On considère l'équation des ondes

$$(E_L)\begin{cases} \partial_t^2 u - \triangle u = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \times \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \times \partial\Omega \\ (u(0), \partial_t u(0)) = (u^0, u^1) \in H = H_D(\Omega) \times L^2(\Omega) \end{cases}$$

- On définit l'énergie globale par

$$E(u,t) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|\partial_t u\,(t)|^2 + |\nabla_x u\,(t)|^2)dx.$$

- On définit l'énergie locale (dans le cas d'un domaine extérieur) par :

$$E_R(u,t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega\cap B_R} (|\partial_t u\,(t)|^2 + |\nabla_x u\,(t)|^2)dx.$$

$\left(\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{O}\right.$, où O est un ouvert borné régulier$\left.\right)$

Objectif : faire décroître l'énergie uniformément en ajoutant à l'équation un terme dissipatif.

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \triangle u + a(x)\partial_t u = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \times \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \times \partial\Omega \\ (u(0), \partial_t u(0)) = (u^0, u^1) \text{ dans } H = H_D(\Omega) \times L^2(\Omega) & \end{cases}$$

$$E(u,T) - E(u,0) = -\int_0^T \int_\Omega a(x) \mid \partial_t u(t,x) \mid^2 dtdx.$$

Si $a(x) \geq 0$ alors $E(u,t) \searrow$.

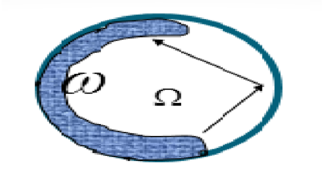
- Bardos, Lebeau et Rauch (1990) :

$$\text{CCG} \Rightarrow E(u,t) \leq Ce^{-\alpha t}E(u,0).$$

- Bardos, Lebeau et Rauch (1992) :

$$\text{CCG} \Leftrightarrow \text{estimation d'observabilité.}$$

Notons $\omega = \{x \in \Omega \text{ tel que } a(x) > 0\}$.



↘ de l'énergie pour les ondes avec dissipateur non-linéaire

- Soit O un domaine compact de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 3$ est impair) avec $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus O$, $O \subset B_R$ pour un certain $R > 0$.

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + a(x)\,\rho(t)\,g(\partial_t u) = 0, & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega, \\ u(0,x) = \varphi_0(x) \quad \text{et} \quad \partial_t u(0,x) = \varphi_1(x). \end{cases} \tag{1}$$

- Le terme non-linéaire satisfait :
  - $a(x)$ est ≥ 0, $C^\infty(\Omega)$ avec $\operatorname{supp} a \subset B_R$.
  - ρ est ≥ 0, monotone, dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et il existe $C_0 > 0$ telle que

$$|\rho'(t)| \leq C_0 \rho(t), \text{ pour tout } t \geq 0.$$

  - $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, $\nearrow$ et vérifiant $g(0) = 0$.

On obtient formellement l'identité suivante :

$$E(u,T)+\int_0^T\int_\Omega a(x)\,\rho(t)g\left(\partial_t u\right)\partial_t u\,dx\,dt=E(u,0),$$

pour tout $T\geq 0$. On définit l'énergie locale par :

$$E_r(u,t)=\frac{1}{2}\int_{\Omega\cap B_r}\left(\left|\nabla u\,(t,x)\right|^2+\left|\partial_t u\,(t,x)\right|^2\right)dx,$$

où $B_r=\left\{x\in\mathbb{R}^d,|x|<r\right\}$ qui contient l'obstacle O.

Pour la littérature :

- Nakao a prouvé que l'énergie locale $\searrow$ exp si d est impair et poly si d est pair sous la CG de Lions.
- Aloui et Khenissi ont prouvé $\searrow$ exp de l'énergie locale en présence d'un dissipateur linéaire localisé en dimension impaire et Khenissi a prouvé $\searrow$ poly en dimension paire d'espace.
  Pour cela, ils ont introduit la CCG inspiré de la condition microlocale de Bardos-Lebeau-Rauch et ils ont utilisé de manière cruciale les propriétés de propagation des mesures de défaut microlocales de Gérard.

Définition 1 (C.C.G.E)

Soit $R > 0$ tel que $O \subset B_R$, $T_R > 0$ et $\omega = \{x \in \Omega; a(x) > 0\}$. On dit que (ω, T_R) vérifie la condition du contrôle géométrique extérieure sur B_R $(C.C.G.E)$, si toute géodésique γ issue de B_R à l'instant $t = 0$, vérifie l'une des deux conditions suivantes :
· γ quitte $\mathbb{R}_+ \times B_R$ avant l'instant T_R,
ou
· γ rencontre $\mathbb{R}_+ \times \omega$ entre les instants 0 et T_R.

- On définit la fonction concave h_0 qui peut décrire la croissance de la fonction g au voisinage de l'origine de la façon suivante : $h_0(0) = 0$ et

$$h_0\left(g\left(y\right)y\right) \geq \epsilon_0 \left(g\left(y\right)^2 + y^2\right) \quad \text{pour} \quad |y| < \eta_0,$$

pour $\epsilon_0, \eta_0 > 0$.

- On introduit quelques fonctions auxiliaires $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ qui sont liées à la fonction ρ comme suit :

$$\alpha(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho \text{ est décroissante} \\ \rho^{-2}(t+T) & \text{si } \rho \text{ est croissante} \end{cases}$$

et

$$\beta(t) = \begin{cases} \frac{1}{T}\rho(t+T) & & \text{si } \rho \text{ est décroissante} \\ \left.\begin{array}{ll} \frac{1}{T} & t < T \\ \frac{1}{T}\rho(t-T) & t \geq T \end{array}\right\} & & \text{si } \rho \text{ est croissante} \end{cases}$$

- Finalement on construit les deux fonctions h et q de la manière suivante :

$$h = I + \mathfrak{m}_a(\Omega_T)\, h_0 \circ \frac{I}{T\mathfrak{m}_a(\Omega_T)},$$

et

$$q(t,.) = \beta(t) h^{-1} \circ \frac{\alpha(t)}{K} I, \tag{2}$$

pour $t \geq 0$ et $K \geq C_T > 0$ où $m_a(\Omega_T) = \int_0^T \int_\Omega a(x)dxdt$.

Théorème 1 (B-Daoulatli)

Soit $R > 0$ et $T_R > 0$, tels que $(\{x \in \Omega; a(x) > 0\}, T_R)$ satisfait $(C.C.G.E)$ sur B_R. Soit q la fonction définie par (2), et on suppose que les données initiales $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}$ sont à support compact dans B_R, alors il existe $T \geq T_R + 9R$, tel que

$$E_R(u,t) \leq S(t-T), \qquad \text{pour tout } t \geq T,$$

où $S(t)$ est la solution de l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\frac{dS}{dt} + q(t, S(t)) = 0, \qquad S(0) = E(u,0).$$

De plus, si pour un certain $T_0 \gg 1$, $\displaystyle\int_{T_0}^{t} q(s,\gamma)\,ds \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$, pour tout $0 < \gamma \ll 1$, alors

$$E_R(u,t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exemple 1 (Dissipateur super-linéaire près de l'origine)

On suppose que $g(s) = s|s|^{r_0-1}$, *pour* $0 \le |s| < 1$ *et* $r_0 > 1$.

1. *Si* ρ *est décroissante :* $\alpha(t) = (2TK)^{-1}$ *et* $\beta(t) = \rho((t+1)T)$ *:*

$$E_R(u,t) \le c\,\|\varphi\|_H^2 \left(1 + \left(\frac{\|\varphi\|_H^2}{K}\right)^{\frac{r_0-1}{2}} \frac{c}{KT} \int_0^t \rho(s)\,ds\right)^{-\frac{2}{r_0-1}}, t \ge 0.$$

2. *Si* ρ *est croissante :* $\alpha(t) = \left(2TK\rho^2(t+T)\right)^{-1}$ *et* $\beta(t) = \rho(t-T)$ *:*

$$E_R(u,t) \le c\,\|\varphi\|_H^2 \left(1 + \left(\frac{\|\varphi\|_H^2}{K}\right)^{\frac{r_0-1}{2}} \frac{c}{KT} \int_0^t (\rho(s))^{-r_0}\,ds\right)^{-\frac{2}{r_0-1}}, t \ge 0.$$

Remarque 1

Si $\rho(t) = (1+t)^{\tau}$, $\tau \in \left[-1, \frac{1}{r_0}\right]$ *:*

$$E_R(u,t) \leq C_K \left(\ln(2+t)\right)^{-\frac{2}{r_0-1}}, \quad \tau = -1 \text{ ou } \tau = \frac{1}{r_0},$$

$$E_R(u,t) \leq C_K (1+t)^{\mu}, \qquad \tau \in \left]-1, \frac{1}{r_0}\right[,$$

$\forall t \geq 0$, *avec*

$$\mu = -\frac{2}{r_0-1}(1+\tau), \qquad \text{pour } -1 < \tau \leq 0,$$

$$\mu = -\frac{2}{r_0-1}(1-\tau r_0), \quad \text{pour } 0 \leq \tau < \frac{1}{r_0}.$$

Stabilisation faible pour les systèmes linéaires

Soit H un espace de Hilbert muni d'une norme $\|.\|_H$, et soit
$A : \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ un opérateur borné, inversible, autoadjoint et positif.
On introduit aussi les espaces de Hilbert H_α : pour tout $\alpha \geq 0$,
$H_\alpha = \mathcal{D}(A^\alpha)$, muni de la norme $\|z\|_\alpha = \|A^\alpha z\|_H$.
Soit $B : U \to H$ un opérateur linéaire borné, où U est un espace de Hilbert.
On considère le système suivant :

$$\ddot{w}(t) + Aw(t) + BB^*\dot{w}(t) = 0,\; w(0) = w_0, \dot{w}(0) = w_1,\; t \in [0, \infty). \tag{3}$$

Pour $(w_0, w_1) \in H_{1/2} \times H$, le problème (3) admet une ! solution $w \in C([0, \infty); H_{1/2} \times H)$ telle que $B^*\dot{w}(\cdot) \in L^2_{loc}((0, +\infty), U)$.

De plus, w satisfait l'estimation d'énergie, pour tout $t \geq 0$

$$\|(w_0, w_1)\|^2_{H_{1/2}\times H} - \|(w(t), \dot{w}(t))\|^2_{H_{1/2}\times H} = 2\int_0^t \|B^*\dot{w}(s)\|^2_U \, ds\,.$$

On considère le problème conservatif associé :

$$\ddot{\varphi}(t) + A\varphi(t) = 0, \tag{4}$$

$$\varphi(0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(0) = \varphi_1. \tag{5}$$

Il est bien connu que (4)-(5) est bien posé dans $H_1 \times H_{1/2}$.
Maintenant, on considère l'opérateur linéaire non borné

$$\mathcal{A}_d : \mathcal{D}(\mathcal{A}_d) \subset H_{1/2}\times H \to H_{1/2}\times H,\ \mathcal{A}_d = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A & -BB^* \end{pmatrix},$$

où

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_d) = H_1 \times H_{1/2}.$$

Soit $\mathcal{H} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que $\mathcal{H}$ est continue, inversible et croissante sur $\mathbb{R}_+$ et on suppose que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}\mathcal{H}(x)$ est croissante sur $(0,1)$.

Théorème 2 (Ammari-B-El Mufti)

On suppose qu'il existe $C, T > 0$ tels que pour toute donnée initiale $(0,0) \neq (\varphi_0, \varphi_1) \in H_1 \times H_{1/2}$ on a

$$\int_0^T ||B^*\dot{\varphi}(t)||_U^2 \, dt \geq C \, ||(\varphi_0, \varphi_1)||^2_{H_1 \times H_{1/2}} \mathcal{H}\left(\frac{||(\varphi_0, \varphi_1)||^2_{H_{1/2} \times H}}{||(\varphi_0, \varphi_1)||^2_{H_1 \times H_{1/2}}}\right), \quad (6)$$

alors il existe une constante $C_1 > 0$ telle que pour tout $t > 0$ et pour toute donnée initiale $(0,0) \neq (w_0, w_1) \in H_1 \times H_{1/2}$ on a :

$$||(w(t), \dot{w}(t))||^2_{H_{1/2} \times H} \leq C_1 \, \mathcal{H}^{-1}\left(\frac{1}{1+t}\right) ||(w_0, w_1)||^2_{H_1 \times H_{1/2}}.$$

Exemple

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x)\, u_t = 0, & (x,t) \in \Omega \times (0,+\infty) \\ u = 0\,, \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = u^0(x),\ u_t(x,0) = u^1(x)\,, & \text{sur } \Omega, \end{cases} \tag{7}$$

où Ω est un ouvert borné, convexe de $\mathbb{R}^N$ et de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ avec $a \geq 0$ sur Ω et vérifiant supp$a \neq \emptyset$. On a :

$$A = -\Delta : \mathcal{D}(A) = H_1 \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega),\ H_1 = \mathcal{D}(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),$$

$$H_{1/2} = H_0^1(\Omega), U = L^2(\Omega) \text{ and } Bz = B^* z = \sqrt{a} z, \forall\, z \in L^2(\Omega).$$

Le système conservatif associé est :

$$\begin{cases} \phi_{tt} - \Delta\phi = 0\,, \quad \Omega \times (0, +\infty)\,, \\ \phi = 0, \quad \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ \phi(x, 0) = u^0(x), \phi_t(x, 0) = u^1(x), \quad \Omega. \end{cases}$$

L'estimation d'observabilité est donnée par :

Proposition 1 (Phung)

$\forall\ \beta \in]0, 1[\ \exists\ T, c_T > 0$ *telles que l'estimation*

$$\left\| (u^0, u^1) \right\|^2_{[H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)]\times H^1_0(\Omega)} \exp\left[-c_T \left(\frac{\left\| (u^0, u^1) \right\|_{[H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)]\times H^1_0(\Omega)}}{\left\| (u^0, u^1) \right\|_{H^1_0(\Omega)\times L^2(\Omega)}} \right)^{1/\beta} \right]$$

$$\leq \int_0^T \int_\Omega a(x)\, |\phi_t(x,t)|^2\, dx\, dt\,,$$

est satisfaite $\forall\ (u^0, u^1) \in \left[H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)\right] \times H^1_0(\Omega)$.

Ici on a l'estimation (6) pour $\mathcal{H}(x) = \exp(-\frac{c_T}{x^{1/2\beta}})$, $\forall\, x > 0$.

$\Rightarrow$

$\forall\ \beta \in]0, 1[$, $\exists\ C > 0$ telle que $\forall\ (u^0, u^1) \in \left[H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right] \times H_0^1(\Omega)$ l'énergie de la solution de (7) satisfait l'estimation

$$\|(u(t), \dot{u}(t))\|^2_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{(\ln(1+t))^{2\beta}} \left\|(u^0, u^1)\right\|^2_{[H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)]\times H_0^1(\Omega)},$$

pour tout $t > 0$.

Ce théorème généralise un résult obtenu par Lebeau (méthode de la résolvante).

Stabilisation faible pour les systèmes non linéaires

On considère l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$\begin{cases} \ddot{w}(t) + Aw(t) + a(.)\rho(., \dot{w}) = 0 \; t \in (0, \infty) \, , x \in \Omega \\ w(0) = w^0 \, , \dot{w}(0) = w^1 \, . \end{cases} \tag{8}$$

Avec $(w^0, w^1) \in H_{1/2} \times H$, le problème (8) admet une unique solution

$$w \in C([0, \infty); H_{1/2}) \cap C^1([0, \infty); H).$$

de plus w satisfait, $\forall t \geq 0$, l'identité d'énergie

$$\|(w^0, w^1)\|^2_{H_{1/2} \times H} - \|(w(t), \dot{w}(t))\|^2_{H_{1/2} \times H} = 2 \int_0^t \int_\Omega a(.)\rho(., \dot{w}(s))\dot{w}(s) \, dx \, ds.$$

Hypothèses

Hypothèse (H1) $\rho \in \mathcal{C}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ et $\nearrow$ % à la deuxième variable telle que $\rho(.,0) = 0$ sur Ω et $\exists\, g \in \mathcal{C}([-1,1];\mathbb{R}) \nearrow$ impaire et vérifiant $g'(0) = 0$, avec

$$\begin{cases} c_1 g(|v|) \leq |\rho(.,v)| \leq c_2 g^{-1}(|v|)\,, & |v| \leq 1\,, \text{ sur } \Omega\,, \\ c_1 |v| \leq |\rho(.,v)| \leq c_2 |v|\,, & |v| \geq 1\,, \text{ sur } \Omega\,, \end{cases}$$

où $c_i > 0$ pour $i = 1, 2$.
De plus $a \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, avec $a \geq 0$ sur Ω.

On définit les fonctions R et L comme suit :

$$R(x) = \begin{cases} \sqrt{x}g(\sqrt{x}) \, , \; x \in [0, r_0^2] \, , \\ +\infty \text{ pour } x \in \mathbb{R}\backslash[0, r_0^2]. \end{cases} \tag{9}$$

$$L(y) = \begin{cases} \dfrac{R^\star(y)}{y} & , \text{si } y \in (0, +\infty) \, , \\ 0 & , \text{si } y = 0 \, , \end{cases}$$

où $R^\star$ est la fonction convexe conjuguée de R, i.e. : $R^\star(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}}\{xy - R(x)\}$. Finalement, on définit f :

$$R^\star(f(s)) = \frac{sf(s)}{\beta} \, , \qquad s \in [0, \beta r_0^2) \, ,$$

où β est une constante qui va être choisie ultérieurement.

Remarquons que f est définie par

$$f(s) = L^{-1}\left(\frac{s}{\beta}\right), \quad \forall\, s \in [0, \beta r_0^2)\,.$$

Maintenant, on considère l'opérateur non borné

$$\mathcal{A}_d : \mathcal{D}(\mathcal{A}_d) \to H_{1/2} \times H,\ \mathcal{A}_d = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A & -a\rho \end{pmatrix},$$

où

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_d) = \{(u, v) \in H_{1/2} \times H,\ Au + a\rho(v) \in H,\ v \in H_{1/2}\}.$$

Soit ϕ la solution du système non dissipé associé :

$$\begin{cases} \ddot{\phi}(t) + A\phi(t) = 0, \\ \phi(0) = \phi^0, \ \dot{\phi}(0) = \phi^1. \end{cases} \tag{10}$$

Hypothèse (H2) Il existe $T, C_T > 0$ tels que l'inégalité d'observabilité suivante est satisfaite pour le système conservatif (10)

$$C_T||(\phi^0, \phi^1)||^2_{H_1 \times H_{1/2}} \mathcal{H}\left(\frac{E_\phi(0)}{||(\phi^0, \phi^1)||^2_{H_1 \times H_{1/2}}}\right) \le \int_0^T \|\sqrt{a}\dot{\phi}\|^2_H dt \tag{11}$$

$\forall\ (\phi^0, \phi^1) \in H_1 \times H_{1/2}$.

Théorème 3 (Ammari-B-El Mufti)

Soient $\eta > 0$ *et* $T_0 > 0$ *2 réels fixés ultérieurement. Pour tout* $r \in (0, \eta)$*, on définit la fonction* $\mathcal{K}_r$ *de* $(0, r)$ *dans* $[0, \infty)$ *par*

$$\mathcal{K}_r(\tau) = \int_\tau^r \frac{1}{v(f\mathcal{H})^{-1}(v)}\,dv.$$

On définit aussi

$$\Psi_r(z) = z + \mathcal{K}_r\Big(f\mathcal{H}\big(\frac{1}{z}\big)\Big), \quad z \geq \frac{1}{(f\mathcal{H})^{-1}(r)}\,.$$

On suppose $(\mathbf{H1})$ *et* $(\mathbf{H2})$*, alors* $\forall\ (w^0, w^1) \in H_1 \times H_{1/2}$*, l'énergie de la solution de* (8) *satisfait*

$$E(w,t) \leq \beta T (f\mathcal{H})^{-1}\left(\frac{1}{\Psi_r^{-1}\left(\frac{t-T}{T_0}\right)}\right), \qquad \textit{pour } t \textit{ suffisament grand}.$$

Exemple

On suppose que ρ et a satisfont l'hypothèse (**H1**).
On suppose qu'il $\exists T > 0$ telle que la solution de (10) satisfait l'inégalité d'observabilité faible (11). Alors, on a :

Soit $\boxed{g(x) = x^3 \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)}$. Alors on a :

$$E(w,t) \leq C\left(x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{x}\right)\mathcal{H}(x)\right)^{-1}\left(\frac{1}{1+t}\right),$$

pour t suffisament grand et $\forall\,(w^0, w^1) \in H_1 \times H_{1/2}$.

Cas particuliers : Pour $\mathcal{H}(x) = \exp\left(-\frac{C}{x^{\frac{1}{p}}}\right)$, $C, p > 0$ on a :

$$E(w,t) \leq \frac{C}{\ln(1+t)}, \text{ pour } p \geq 1,$$

et

$$E(w,t) \leq \frac{C}{(\ln(1+t))^p}, \text{ pour } p < 1.$$

Estimation de type observabilité

On considère maintenant le système suivant :

$$\begin{cases} w''(t) + Aw(t) + BB^* w'(t) = 0, \\ w(0) = w_0, w'(0) = w_1, \end{cases} \tag{12}$$

$V \times X$ avec $V = \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}})$ et $\|x\|_V = \|A^{\frac{1}{2}} x\|_X, \forall\, x \in V$.

$$\begin{cases} \phi''(t) + A\phi(t) = 0, \\ \phi(0) = w_0,\ \phi'(0) = w_1. \end{cases}$$

Soit $\mathcal{G}$ une fonction $\geq$ et $\nearrow$ sur $[0, +\infty)$ et soit $\mathcal{F}(x) = x\,(\mathcal{G}(x))^2$.

Théorème 4 (Ammari-B-El Mufti)

1. *On suppose qu'il existe* $C > 0$ *telle que pour toute* $(0,0) \neq (w_0, w_1) \in V \times X$ *et pour tout* $t > 0$*, on a :*

$$E(w,t) \leq C||(w_0,w_1)||^2_{V\times X}\mathcal{G}^{-1}\left(\frac{1}{t}\right),$$

alors il existe $C > 0$ *telle que :*

$$||(w_0,w_1)||^2_{V\times X} \leq 16 \int_0^{\frac{1}{\mathcal{G}\left(\frac{1}{2C\Lambda}\right)}} \|B^*\phi'(t)\|^2_U \, dt,$$

où

$$\Lambda = \frac{||(w_0,w_1)||^2_{\mathcal{D}(A)\times V}}{||(w_0,w_1)||^2_{V\times X}}.$$

2. On suppose que $x \mapsto x\,\mathcal{F}^{-1}(\frac{1}{x})$ est croissante et qu'il existe $C > 0$ telle que :

$$||(w_0, w_1)||^2_{V \times X} \leq C \int_0^{\frac{1}{\mathcal{G}\left(\frac{1}{2C\Lambda}\right)}} \|B^* \phi'(t)\|^2_U dt.$$

alors il existe $C > 0$ telle que pour tout $t > 0$, on a :

$$E(w, t) \leq C||(w_0, w_1)||^2_{\mathcal{D}(A) \times V} \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

Exemple 1

Soit $\mathcal{G}(x) = x^p$ sur $(0, r_0]$, $p \in \mathbb{R} \setminus [-\frac{1}{2}, 0]$. Alors on a ⟲ entre

i) $\exists C > 0$ telle que pour toute donnée $(w_0, w_1) \in V \times X$, la solution ϕ du problème non-dissipé vérifie :

$$||(w_0, w_1)||^2_{V \times X} \leq 16 \int_0^{C\Lambda^p} \|B^* \phi'(t)\|^2_U \, dt.$$

ii) $\exists C > 0$ pour toute donnée $(w_0, w_1) \in \mathcal{D}(A) \times V$ et pour tout $t > 0$, la solution w du problème dissipé vérifie :

$$E(w, t) \leq \frac{C}{t^p} ||(w_0, w_1)||^2_{\mathcal{D}(A) \times V}.$$

Remarque 2

K. Phung a donné un exemple de géométrie captif (où la C.C.G n'est pas vérifiée) et a démontré une estimation de type observabilité pour les ondes amorties avec $\mathcal{G}(x) = x^{\delta}, \delta > 0$.

Exemple 2

Soit $\mathcal{G}(x) = \frac{exp(-\frac{1}{x^p})}{\sqrt{x}}$ sur $(0, r_0]$, $p \in \mathbb{R}_+$. Alors on a :

i) S'il existe $C > 0$ telle que ϕ vérifie :

$$||(w_0, w_1)||^2_{H^1_0(\Omega)\times L^2(\Omega)} \leq 16 \int_0^{\frac{1}{\mathcal{G}\left(\frac{1}{2C\Lambda}\right)}} \|B^*\phi'(t)\|^2_U \, dt.$$

$\Rightarrow \exists C_1 > 0$ telle que w vérifie :

$$E(w,t) \leq \frac{C_1}{(\log t)^{\frac{1}{p}}} ||(w_0, w_1)||^2_{\mathcal{D}(A)\times V}.$$

ii) S'il $\exists C_1 > 0$ telle que pour $t > 0$, w vérifie :

$$E(w,t) \leq \frac{C_1}{(\log t)^{\frac{1}{p}}} ||(w_0, w_1)||^2_{\mathcal{D}(A)\times V}.$$

$\Rightarrow \exists C > 0$ telle que ϕ vérifie :

$$||(w_0, w_1)||^2_{V\times X} \leq 16 \int_0^{\frac{1}{\mathcal{F}\left(\frac{1}{2C\Lambda}\right)}} \|B^*\phi'(t)|^2 \, dt.$$

Le cas non-linéaire

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + a(x)g(\partial_t u) = 0, \text{ dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ u = 0, \text{ sur } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ (u, \partial_t u)(., 0) = (u_0, u_1), \text{ dans } \Omega, \end{cases}$$

$a(x) \geq 0$ pour tout $x \in \Omega$, et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \nearrow$, continue avec $g(0) = 0$, $sg(s) \geq 0$ et

(i) $\exists r \in [1, \infty), \exists c_1, c_2 > 0, |s| \leq 1 \Rightarrow c_1|s|^r \leq |g(s)| \leq c_2|s|^{1/r}$.

(ii) $\exists k \in [0, 1], \exists p \in [1, \infty), \exists c_3, c_4 > 0, |s| > 1 \Rightarrow$

$$c_3|s|^k \leq |g(s)| \leq c_4|s|^p.$$

(iii) $(n-2)(1-k) \leq 4r$ et $(n-2)(p-1) \leq 1$.

On note

$$X(u_0,u_1)=E(u,0)+E_1(u,0)+[E_1(u,0)]^{(2p-1)}+[E_1(u,0)]^{(1+\frac{r-k}{r+1})},$$

où

$$E_1(u,0)=\|(\Delta u_0-ag(u_1),u_1)\|^2_{L^2(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}.$$

On considère l'équation des ondes amorties associée :

$$\begin{cases}\partial_t^2 u_l-\Delta u_l+a(x)\partial_t u_l=0,\ \text{dans }\Omega\times(0,+\infty),\\ u_l=0,\ \text{sur }\partial\Omega\times(0,+\infty),\\ (u_l,\partial_t u_l)(.,0)=(u_0,u_1)\in\left[H^2(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\right]\cap H_0^1(\Omega).\end{cases}$$

On considère l'équation des ondes conservative associée :

$$\begin{cases} \partial_t^2\phi(t) - \Delta\phi(t) = 0, \\ \phi(0) = u_0,\ \partial_t\phi(0) = u_1. \end{cases}$$

Hypothèse :

(H) On suppose que $x \mapsto x\,\mathcal{F}^{-1}(\frac{1}{x})$ est $\nearrow$ et $\exists C > 0$ telle que pour tout $(u_0, u_1) \in \left[H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)\right] \cap H_0^1(\Omega)$, ϕ vérifie :

$$||(u_0, u_1)||^2_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} \leq C \int_0^{\frac{1}{g\left(\frac{1}{2C\Lambda_r}\right)}} \int_\Omega a(x)|\partial_t\phi(x,t)|^2 dxdt,$$

avec $\Lambda_r = \frac{(r-1)+X(u_0,u_1)}{E(u(0))}$.

Finalement on note : $G(x) =: Cx^{2r+1}(\mathcal{F}(x))^{4(r+1)}$.

Théorème 5 (Ammari-B-El Mufti)

On suppose que (H) est vérifiée et qu'il $\exists c_0$ *telle que la fonction* G *satisfait* $G^{-1}(x) \geq \frac{c}{c+1} G^{-1}\big(x(c_0+1)\big)$ *pour tout* $x \geq 0$. *Alors on a :*

$$E(u,t) \leq CG^{-1}\left(\frac{c'}{t}\right)\big((r-1)+X(u_0,u_1)\big), \qquad (13)$$

pour t *suffisamment grand et pour tout*
$(0,0) \neq (u^0,u^1) \in \left[H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right] \times H_0^1(\Omega)$.
La constante C *dépend de la donnée initiale* (u^0,u^1).

Exemple 1

Pour $\mathcal{G}(x) = x^p$, on a $\mathcal{F}(x) = x^{2p+1}$, et $G(x) = x^{(4p+3)(2r+1)-1}$. Alors l'énergie de la solution du système non-linéaire satisfait l'estimation :

$$E(u,t) \leq \frac{c}{t^{\frac{1}{(4p+3)(2r+1)-1}}}\left((r-1) + X(u_0,u_1)\right),$$

pour t suffisamment grand.

Exemple 2

Pour les ondes amorties avec un dissipateur localisé arbitrairement on a une observabilité faible avec $\mathcal{H}(x) = \exp(-\frac{c_T}{x^{1/2\beta}}), \; x > 0.$

$\Rightarrow$ Estimation de type observabilité.

$\Rightarrow \searrow$ log de l'énergie.

Réferences

- [1] *Local energy decay for the wave equation with a nonlinear time dependent damping,* avec M. Daoulatli. Applicable Analysis, **2013**, Vol : 92, Issue : 11, 2288-2308.
- [2] *Stabilization of the nonlinear damped wave equation via linear weak observability,* avec K. Ammari et K. El Mufti. Nonlinear Differential Equations and Applications, **2016**, Vol 23, Issue 2, 1-18.
- [3] *Non-uniform energy decay of some dissipative evolution systems,* avec K. Ammari et K. El Mufti. Soumis.

Merci pour votre attention !