Euler : *Institutiones Calculi Integralis,* 1768

Traduction : Dominique Tournès. Extrait de : Une approche graphique de la méthode d'Euler, *in De grands défis mathématiques, d'Euclide à Condorcet,* É. Barbin éd., Vuibert et Adapt-SNES, 2010.

PROBLÈME 85

650. Quelle que soit l'équation différentielle proposée, déterminer de la manière la plus approchée son intégrale complète.

SOLUTION

Soient deux variables x et y, entre lesquelles une équation différentielle est proposée ; cette équation sera de la forme $dy/dx = V$, où V est n'importe quelle fonction de x et y. D'autre part, quand on recherche une intégrale complète, on doit l'interpréter de telle manière que si l'on attribue à x une valeur déterminée, par exemple $x = a$, l'autre variable y doit acquérir une valeur donnée, par exemple $y = b$. Traitons donc d'abord la question de trouver la valeur de y quand on donne à x une valeur peu différente de a, autrement dit cherchons y en posant $x = a + \omega$. Or, puisque ω est une petite quantité, la valeur de y restera elle-même très peu différente de b ; c'est pourquoi, si x varie seulement de a jusqu'à $a + \omega$, il est permis de considérer la quantité V comme constante dans l'intervalle. Ainsi, ayant posé $x = a$ et $y = b$, il viendra $V = A$ et, pour ce mince changement, nous aurons : $dy/dx = A$, d'où, en intégrant, $y = b + A(x - a)$, une constante ayant évidemment été ajoutée de sorte qu'on obtienne $y = b$ pour $x = a$. Décidons donc qu'à $x = a + \omega$ correspondra $y = b + A\omega$.

De même qu'ici, à partir des valeurs données initialement $x = a$ et $y = b$, nous avons trouvé les valeurs suivantes très proches $x = a + \omega$ et $y = b + A\omega$, de même il est permis d'avancer plus loin à partir de ces dernières, au moyen de petits intervalles, jusqu'à ce qu'on parvienne enfin à des valeurs éloignées autant que l'on voudra des valeurs initiales. Afin de faire apparaître plus clairement ces opérations, disposons-les successivement de la manière suivante :

Variables	*Valeurs successives*
x	$a, a', a'', a''', a^{iv}, \ldots\ 'x, x$
y	$b, b', b'', b''', b^{iv}, \ldots\ 'y, y$
V	$A, A', A'', A''', A^{iv}, \ldots\ 'V, V$

Évidemment, des premières valeurs $x = a$ et $y = b$, on tirera $V = A$, mais alors, pour les secondes, on aura : $b' = b + A(a' - a)$, la différence $a' - a$ ayant été choisie aussi petite que l'on veut. De là, en posant $x = a'$ et $y = b'$, on calculera $V = A'$ et, par suite, pour les troisièmes valeurs, on obtiendra $b'' = b' + A'(a'' - a')$, d'où, ayant posé $x = a''$ et $y = b''$, il viendra $V = A''$. Alors, pour les quatrièmes valeurs, nous aurons : $b''' = b'' + A''(a''' - a'')$ et, de là, en posant $x = a'''$ et $y = b'''$, nous déterminerons $V = A'''$ et ainsi il sera permis de s'avancer vers des valeurs aussi éloignées que l'on voudra des valeurs initiales. Or, la première série qui fait apparaître les valeurs successives de x peut être prise dans le sens que l'on veut, pourvu que ce soit par intervalles très petits qu'elle croisse ou qu'elle décroisse.

COROLLAIRE 1

651. Donc, pour chaque petit intervalle particulier, le calcul se déroule de la même manière, et ainsi sont obtenues les valeurs qui dépendent successivement les unes des autres. Par cette méthode, pour toutes les valeurs particulières données de x, les valeurs correspondantes de y peuvent être déterminées.

COROLLAIRE 2

652. Plus petits sont choisis les intervalles par lesquels on suppose que les valeurs de x augmentent, plus précises sont les valeurs obtenues pour chaque intervalle particulier. Entre-temps cependant, les erreurs commises dans chaque intervalle particulier, même si elles sont bien plus petites, s'accumulent en plus grand nombre.

COROLLAIRE 3

653. Or, dans ce calcul, les erreurs prennent leur source dans le fait que nous considérons dans chaque intervalle particulier les deux quantités x et y comme constantes et qu'ainsi la fonction V est tenue pour une constante. Par suite, plus la valeur de V varie d'un intervalle au suivant, plus grandes sont les erreurs à redouter.