L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

1 Les théorèmes.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V. Pour tout $\delta > 0$:

$$P\left(|X-\mu| \geq \delta\right) \leq \frac{V}{\delta^2}.$$

Inégalité de concentration. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon de taille n d'une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V. On pose $M_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$. Alors pour tout $\delta > 0$:

$$P\left(\left|M_n-\mu\right| \geq \delta\right) \leq \frac{V}{n\delta^2}.$$

2 Exercices.

Exercice 1.

On lance 3600 fois un dé équilibré à six faces. On souhaite minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du chiffre 1 soit compris entre 480 et 720.

1. Soit S la variable aléatoire comptant le nombre d'apparitions du chiffre 1 au cours des 3600 lancers. Déterminer la loi de S.
2. Prouver que $E(S) = 600$ et $V(S) = 500$.
3. Justifier l'équivalence :
$$480 < S < 720 \iff |S-600| < 120.$$
4. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, prouver que
$$P(480 < S < 720) \geq 0,96.$$

Exercice 2.

On effectue une suite de lancers d'un dé à quatre faces. On cherche un nombre de lancers tel que, avec un risque d'erreur inférieur à 5 %, la fréquence d'apparition du 4 soit comprise strictement entre $0,24$ et $0,26$.

Pour tout entier naturel non nul i, on pose

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le dé tombe sur 4 au lancer numéro } i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note M_n la fréquence d'apparition du 4 au cours des n premiers lancers (n entier naturel non nul).

1. Déterminer l'espérance et la variance de chacune des variables aléatoires X_i.
2. Pour n entier naturel non nul, exprimer M_n en fonction de $X_1, \ldots, X_n$.
3. Prouver que le problème posé en préambule revient à chercher un entier naturel non nul n tel que
$$P(|M_n - 0,25| < 0,01) \geq 0,95.$$
4. Déterminer un entier naturel non nul n qui convient en utilisant l'inégalité de concentration.