L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Sandrine Lagaize [1] Nicolas Perpète [2]

[1]LMPA, ULCO

[2]Lycée Mariette, Boulogne/mer

Le programme de première (1)

- Modèle probabiliste

Le programme de première (1)

- Modèle probabiliste
  - Formule des probabilités totales

Le programme de première (1)

- Modèle probabiliste
  - Formule des probabilités totales
  - Tableaux et arbres pondérés

Le programme de première (1)

- Modèle probabiliste
  - Formule des probabilités totales
  - Tableaux et arbres pondérés
  - Probabilité conditionnelle, indépendance

Le programme de première (1)

- Modèle probabiliste
  - Formule des probabilités totales
  - Tableaux et arbres pondérés
  - Probabilité conditionnelle, indépendance
- Variable aléatoire

Le programme de première (1)

- Modèle probabiliste
  - Formule des probabilités totales
  - Tableaux et arbres pondérés
  - Probabilité conditionnelle, indépendance
- Variable aléatoire
  - Loi d'une v.a., espérance, variance

Le programme de première (1)

- Modèle probabiliste
  - Formule des probabilités totales
  - Tableaux et arbres pondérés
  - Probabilité conditionnelle, indépendance
- Variable aléatoire
  - Loi d'une v.a., espérance, variance
  - ~~Loi binomiale~~

Le programme de première (2)

- Avec Python :

Le programme de première (2)

- Avec Python :
  - Simuler une v.a. X de loi donnée

k	0	50	100
$P(X=k)$	$0,2$	$0,4$	$0,4$

Le programme de première (2)

- Avec Python :
  - Simuler une v.a. X de loi donnée

k	0	50	100
$P(X=k)$	$0,2$	$0,4$	$0,4$

  - Moyenne d'un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de même loi que X

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

Le programme de première (2)

- Avec Python :
  - Simuler une v.a. X de loi donnée

k	0	50	100
$P(X=k)$	$0,2$	$0,4$	$0,4$

  - Moyenne d'un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de même loi que X

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

- Avec Python ou le tableur :

Le programme de première (2)

- Avec Python :
  - Simuler une v.a. X de loi donnée

k	0	50	100
$P(X = k)$	$0,2$	$0,4$	$0,4$

  - Moyenne d'un échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de même loi que X

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

- Avec Python ou le tableur :
  - Étant donnés N échantillons de taille n, proportion des échantillons dont la moyenne est comprise entre $\mu - 2\sigma/\sqrt{n}$ et $\mu + 2\sigma/\sqrt{n}$

Le programme de terminale (1)

- Idée générale

Le programme de terminale (1)

- Idée générale
  - $E(X) = \mu$, $V(X) = \sigma^2$. Somme et moyenne d'un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de même loi que X

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$
$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

Majoration de $P\left(|M_n - \mu| \geq \frac{k\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Le programme de terminale (1)

- Idée générale
  - $E(X) = \mu$, $V(X) = \sigma^2$. Somme et moyenne d'un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de même loi que X

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$
$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

Majoration de $P\left(|M_n - \mu| \geq \frac{k\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

  -

Ancien programme	Nouveau programme
$X_i \sim \mathcal{B}(p)$	X_i quelconques
$S_n \sim \mathcal{B}(n, p)$	S_n quelconque
Approx. asympt. par $N(0,1)$	Calculs exacts via inég. B.T.
Loi $N(0,1)$ + stat.	Loi binomiale + stat. + LGN

Le programme de terminale (2)

- Dénombrement

Le programme de terminale (2)

- Dénombrement
  - Avec les $\binom{n}{k}$

Le programme de terminale (2)

- Dénombrement
  - Avec les $\binom{n}{k}$
- Loi binomiale

Le programme de terminale (2)

- Dénombrement
  - Avec les $\binom{n}{k}$
- Loi binomiale
  - Schéma de Bernoulli

Le programme de terminale (2)

- Dénombrement
  - Avec les $\binom{n}{k}$
- Loi binomiale
  - Schéma de Bernoulli
  - Formule $\binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$

Le programme de terminale (2)

- Dénombrement
  - Avec les $\binom{n}{k}$
- Loi binomiale
  - Schéma de Bernoulli
  - Formule $\binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$
  - Calculs à la main ou à l'aide d'algorithmes

Le programme de terminale (2)

- Dénombrement
  - Avec les $\binom{n}{k}$
- Loi binomiale
  - Schéma de Bernoulli
  - Formule $\binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$
  - Calculs à la main ou à l'aide d'algorithmes
    - ex 1 : $X \sim \mathcal{B}(100, 0.5)$. Calculer $P(X \leq 10)$

Le programme de terminale (2)

- Dénombrement
  - Avec les $\binom{n}{k}$
- Loi binomiale
  - Schéma de Bernoulli
  - Formule $\binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$
  - Calculs à la main ou à l'aide d'algorithmes
    - ex 1 : $X \sim \mathcal{B}(100, 0.5)$. Calculer $P(X \leq 10)$
    - ex 2 : $X \sim \mathcal{B}(100, 0.5)$. Résoudre $P(X \leq \alpha) \geq 0,95$

Le programme de terminale (3)

- Somme de variables aléatoires

Le programme de terminale (3)

- Somme de variables aléatoires
  - $E(aX) = aE(X)$ et $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

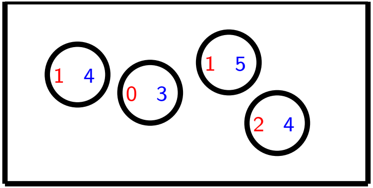
Le programme de terminale (3)

- Somme de variables aléatoires
  - $E(aX) = aE(X)$ et $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
  - $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ dans le cas de v.a. indépendantes – $V(aX) = a^2V(X)$

Le programme de terminale (3)

- Somme de variables aléatoires
  - $E(aX) = aE(X)$ et $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
  - $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ dans le cas de v.a. indépendantes – $V(aX) = a^2 V(X)$
  - Explication sous forme d'exercice.

    Une urne contient quatre boules indiscernables au toucher qui portent chacune deux n° : un n° rouge et un n° bleu. On tire une boule au hasard dans l'urne et on note X le n° rouge, Y le n° bleu.



Calculer $E(X)$, $E(Y)$ et $E(X+Y)$.

Linéarité de l'espérance

Propriété : Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité et admettant une espérance. Soit a un réel. On a

1. $E(aX) = aE(X)$.
2. $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.

Linéarité de l'espérance

Propriété : Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité et admettant une espérance. Soit a un réel. On a

1. $E(aX) = aE(X)$.
2. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Dans le contexte du lycée :

Linéarité de l'espérance

Propriété : Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité et admettant une espérance. Soit a un réel. On a

1. $E(aX) = aE(X)$.
2. $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.

Dans le contexte du lycée :
Propriété : Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes, à support fini, définies sur le même espace de probabilité. Soit a un réel. On a

1. $E(aX) = aE(X)$.
2. $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.

Preuve pour des V.A discrètes à support fini

1. Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$.

Preuve pour des V.A discrètes à support fini

1. Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$.
Notons $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par X.

Preuve pour des V.A discrètes à support fini

1. Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$.
Notons $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par X.

Rappel : l'espérance de X est alors

Preuve pour des V.A discrètes à support fini

1. Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$.
Notons $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par X.

Rappel : l'espérance de X est alors

$$E(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$$

Preuve pour des V.A discrètes à support fini

1. Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$.
Notons $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par X.

Rappel : l'espérance de X est alors

$$E(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i).$$

Preuve pour des V.A discrètes à support fini

1. Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$.
Notons $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par X.

Rappel : l'espérance de X est alors

$$E(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i).$$

On a

$$E(aX) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i) \mathbb{P}(aX = ax_i)$$

Preuve pour des V.A discrètes à support fini

1. Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$.
Notons $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par X.

Rappel : l'espérance de X est alors

$$E(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i).$$

On a

$$E(aX) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i) \mathbb{P}(aX = ax_i) = a \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$$

Preuve pour des V.A discrètes à support fini

1. Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$.
Notons $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par X.

Rappel : l'espérance de X est alors

$$E(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i).$$

On a

$$E(aX) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i) \mathbb{P}(aX = ax_i) = a \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i) = aE(X).$$

Preuve pour des V.A discrètes à support fini

2. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$.
Notons $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par X.
et $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$ l'ensemble des valeurs prises par Y.

Preuve pour des V.A discrètes à support fini

2. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$.
Notons $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par X.
et $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$ l'ensemble des valeurs prises par Y.

Posons $Z = X + Y$.
Notons $Z(\Omega) = \{z_1, z_2, \cdots, z_l\}$ l'ensemble des valeurs prises par X.

Preuve pour des V.A discrètes à support fini

Remarque : loi de Z

Pour tout $z_k \in Z(\Omega)$, on a

Preuve pour des V.A discrètes à support fini

Remarque : loi de Z

Pour tout $z_k \in Z(\Omega)$, on a

$$\{Z = z_k\} = \qquad \{X = x_i \text{ et } Y = y_j\}$$

Preuve pour des V.A discrètes à support fini

Remarque : loi de Z

Pour tout $z_k \in Z(\Omega)$, on a

$$\{Z = z_k\} = \bigcup_{\{(i,j)\ ;\ x_i+y_j=z_k\}} \{X = x_i \text{ et } Y = y_j\}$$

Preuve pour des V.A discrètes à support fini

Remarque : loi de Z

Pour tout $z_k \in Z(\Omega)$, on a

$$\{Z = z_k\} = \bigcup_{\{(i,j)\ ;\ x_i + y_j = z_k\}} \{X = x_i \text{ et } Y = y_j\}$$

D'où $\mathbb{P}(Z = z_k) = \displaystyle\sum_{(i,j)\ ;\ x_i + y_j = z_k} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$.

Preuve pour des V.A discrètes à support fini

$$E(Z) = \sum_{z_k \in Z(\Omega)} z_k \mathbb{P}(Z = z_k)$$

Preuve pour des V.A discrètes à support fini

$$\begin{aligned} E(Z) &= \sum_{z_k \in Z(\Omega)} z_k \mathbb{P}(Z = z_k) \\ &= \sum_{z_k \in Z(\Omega)} z_k \sum_{x_i + y_j = z_k} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) \end{aligned}$$

Preuve pour des V.A discrètes à support fini

$$
\begin{aligned}
E(Z) &= \sum_{z_k \in Z(\Omega)} z_k \mathbb{P}(Z = z_k) \\
&= \sum_{z_k \in Z(\Omega)} z_k \sum_{x_i + y_j = z_k} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) \\
&= \sum_{z_k \in Z(\Omega)} \sum_{x_i + y_j = z_k} z_k \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)
\end{aligned}
$$

Preuve pour des V.A discrètes à support fini

$$
\begin{aligned}
E(Z) &= \sum_{z_k \in Z(\Omega)} z_k \mathbb{P}(Z = z_k) \\
&= \sum_{z_k \in Z(\Omega)} z_k \sum_{x_i + y_j = z_k} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) \\
&= \sum_{z_k \in Z(\Omega)} \sum_{x_i + y_j = z_k} z_k \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) \\
&= \sum_{z_k \in Z(\Omega)} \sum_{x_i + y_j = z_k} (x_i + y_j) \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)
\end{aligned}
$$

Preuve pour des V.A discrètes à support fini

$$\begin{aligned}
E(Z) &= \sum_{z_k \in Z(\Omega)} z_k \mathbb{P}(Z = z_k) \\
&= \sum_{z_k \in Z(\Omega)} z_k \sum_{x_i + y_j = z_k} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) \\
&= \sum_{z_k \in Z(\Omega)} \sum_{x_i + y_j = z_k} z_k \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) \\
&= \sum_{z_k \in Z(\Omega)} \sum_{x_i + y_j = z_k} (x_i + y_j) \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i + y_j) \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)
\end{aligned}$$

Preuve pour des V.A discrètes à support fini

$$E(Z) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i + y_j) \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$$

Preuve pour des V.A discrètes à support fini

$$
\begin{aligned}
E(Z) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i + y_j)\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)
\end{aligned}
$$

Preuve pour des V.A discrètes à support fini

$$
\begin{aligned}
E(Z) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i + y_j)\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) + \sum_{j=1}^{m} y_j \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)
\end{aligned}
$$

Preuve pour des V.A discrètes à support fini

$$
\begin{aligned}
E(Z) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i + y_j)\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) + \sum_{j=1}^{m} y_j \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbb{P}(X = x_i) + \sum_{j=1}^{m} y_j\mathbb{P}(Y = y_j)
\end{aligned}
$$

Preuve pour des V.A discrètes à support fini

$$
\begin{aligned}
E(Z) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i+y_j)\mathbb{P}(X=x_i, Y=y_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i\mathbb{P}(X=x_i, Y=y_j) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_j\mathbb{P}(X=x_i, Y=y_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{m}\mathbb{P}(X=x_i, Y=y_j) + \sum_{j=1}^{m}y_j\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X=x_i, Y=y_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n}x_i\mathbb{P}(X=x_i) + \sum_{j=1}^{m}y_j\mathbb{P}(Y=y_j) \\
&= E(X)+E(Y).
\end{aligned}
$$

Le programme de terminale (4)

- Exercice.
  Un QCM comporte 5 questions. Pour chacune d'entre elles, 4 réponses sont proposées, dont une seule est exacte. On note S le nombre de bonnes réponses à ce QCM pour un élève qui répond au hasard à toutes les questions.

Le programme de terminale (4)

- Exercice.
  Un QCM comporte 5 questions. Pour chacune d'entre elles, 4 réponses sont proposées, dont une seule est exacte. On note S le nombre de bonnes réponses à ce QCM pour un élève qui répond au hasard à toutes les questions.

  1. Loi de S.

Le programme de terminale (4)

- Exercice.
  Un QCM comporte 5 questions. Pour chacune d'entre elles, 4 réponses sont proposées, dont une seule est exacte. On note S le nombre de bonnes réponses à ce QCM pour un élève qui répond au hasard à toutes les questions.
  1. Loi de S.
  2. On pose $X_i = \begin{cases} 1 & \text{si l'élève a bon à la question } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
     Calcul de $E(S)$ et $V(S)$.

Le programme de terminale (4)

- Exercice.
  Un QCM comporte 5 questions. Pour chacune d'entre elles, 4 réponses sont proposées, dont une seule est exacte. On note S le nombre de bonnes réponses à ce QCM pour un élève qui répond au hasard à toutes les questions.
  1. Loi de S.
  2. On pose $X_i = \begin{cases} 1 & \text{si l'élève a bon à la question } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
     Calcul de $E(S)$ et $V(S)$.
     - $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$.

Le programme de terminale (4)

- Application à la loi binomiale

Le programme de terminale (4)

- Application à la loi binomiale
  - $X \sim \mathcal{B}(n, p)$
    $X = X_1 + \cdots + X_n$, où les X_i sont ind. et suivent une loi de Bernoulli

Le programme de terminale (4)

- Application à la loi binomiale
  - $X \sim \mathcal{B}(n, p)$
    $X = X_1 + \cdots + X_n$, où les X_i sont ind. et suivent une loi de Bernoulli
  - $E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$

Le programme de terminale (4)

- Application à la loi binomiale
  - $X \sim \mathcal{B}(n, p)$
    $X = X_1 + \cdots + X_n$, où les X_i sont ind. et suivent une loi de Bernoulli
  - $E(X) = np$, $V(X) = np(1 - p)$
- Cas général

Le programme de terminale (4)

- Application à la loi binomiale
  - $X \sim \mathcal{B}(n, p)$
    $X = X_1 + \cdots + X_n$, où les X_i sont ind. et suivent une loi de Bernoulli
  - $E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$
- Cas général
  - $(X_1, \ldots, X_n)$ échantillon de même loi que X
    Espérance, variance et écart-type de $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et de $M_n = \frac{S_n}{n}$

Le programme de terminale (5)

- Concentration, loi des grands nombres

Le programme de terminale (5)

- Concentration, loi des grands nombres
  - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Le programme de terminale (5)

- Concentration, loi des grands nombres
  - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev
  - Inégalité de concentration

Le programme de terminale (5)

- Concentration, loi des grands nombres
  - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev
  - Inégalité de concentration
  - Loi des grands nombres

Le théorème de Bernoulli

Le théorème de Bernoulli

Jakob Bernoulli (1654-1705)

Le théorème de Bernoulli

Jakob Bernoulli (1654-1705)

« Voici le problème que je veux maintenant publier ici, l'ayant étudié avec soin pendant 20 ans, problème dont la nouveauté aussi bien que la grande utilité ainsi que ses profondes difficultés dépassent en poids et valeur tous les chapitres précédents de mon oeuvre ».

Ars Conjectandi. 1713

Le problème

Bernoulli considère une urne contenant b boules blanches et r boules rouges.

Le problème

Bernoulli considère une urne contenant b boules blanches et r boules rouges.
Notons $p = \frac{b}{b+r}$ la proportion de boules blanches.

Le problème

Bernoulli considère une urne contenant b boules blanches et r boules rouges.
Notons $p = \frac{b}{b+r}$ la proportion de boules blanches.
Il effectue plusieurs fois n tirages avec remise dans cette urne.

Le problème

Bernoulli considère une urne contenant b boules blanches et r boules rouges.
Notons $p = \frac{b}{b+r}$ la proportion de boules blanches.
Il effectue plusieurs fois n tirages avec remise dans cette urne.
Il constate que le nombre de boules blanches obtenu s_n est chaque fois différent

Le problème

Bernoulli considère une urne contenant b boules blanches et r boules rouges.
Notons $p = \frac{b}{b+r}$ la proportion de boules blanches.
Il effectue plusieurs fois n tirages avec remise dans cette urne.
Il constate que le nombre de boules blanches obtenu s_n est chaque fois différent
mais que la proportion $\frac{s_n}{n}$ est proche de p lorsque n est grand.

La modélisation

Notons S_n la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches obtenu après n tirages.

La modélisation

Notons S_n la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches obtenu après n tirages.

On sait que $S_n \sim \mathcal{B}(n, p)$.

La modélisation

Notons S_n la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches obtenu après n tirages.

On sait que $S_n \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$, on a

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

La modélisation

Notons S_n la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches obtenu après n tirages.

On sait que $S_n \sim \mathcal{B}(n, p)$.

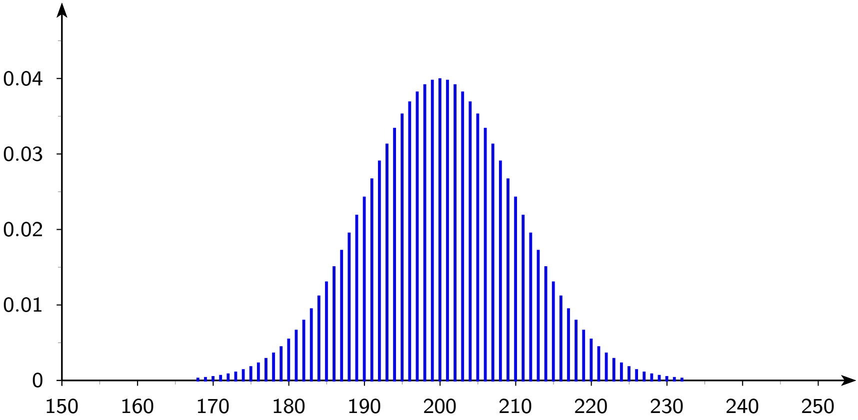
Pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$, on a

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Bernoulli avait constaté que plus k est proche de np plus cette quantité est grande.

Illustration

Représentation graphique de la densité de la loi $\mathcal{B}(400\ ;\ 0,5)$



Le résultat de Bernoulli

Bernoulli a remarqué aussi que pour $\delta > 0$ fixé, $\mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - p| \geq \delta)$ est d'autant plus petite que n est grand.

Le résultat de Bernoulli

Bernoulli a remarqué aussi que pour $\delta > 0$ fixé, $\mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - p| \geq \delta)$ est d'autant plus petite que n est grand.

Autrement dit, avec les notations actuelles :

Le résultat de Bernoulli

Bernoulli a remarqué aussi que pour $\delta > 0$ fixé, $\mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - p| \geq \delta)$ est d'autant plus petite que n est grand.

Autrement dit, avec les notations actuelles :
$\forall \delta > 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left| \frac{S_n}{n} - p \right| \geq \delta \right) = 0.$$

Inégalité de Markov

Cette inégalité attribuée à Markov (1856-1922) a été prouvée en 1869.

Inégalité de Markov

Cette inégalité attribuée à Markov (1856-1922) a été prouvée en 1869.

Propriété :

Soit X une variable aléatoire positive admettant une espérance μ. Pour tout $\delta > 0$, on a

$$\mathbb{P}(X \geq \delta) \leq \frac{\mu}{\delta}.$$

Inégalité de Markov

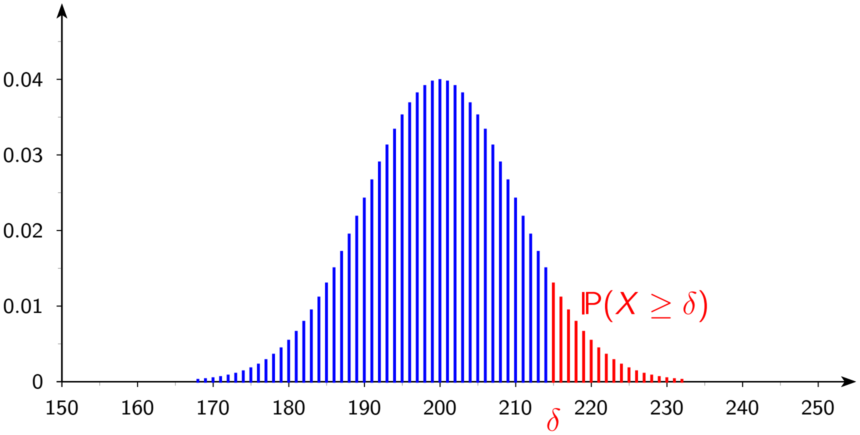
Cette inégalité attribuée à Markov (1856-1922) a été prouvée en 1869.

Propriété :

Soit X une variable aléatoire positive admettant une espérance μ.
Pour tout $\delta > 0$, on a

$$\mathbb{P}(X \geq \delta) \leq \frac{\mu}{\delta}.$$

Inégalité de Markov

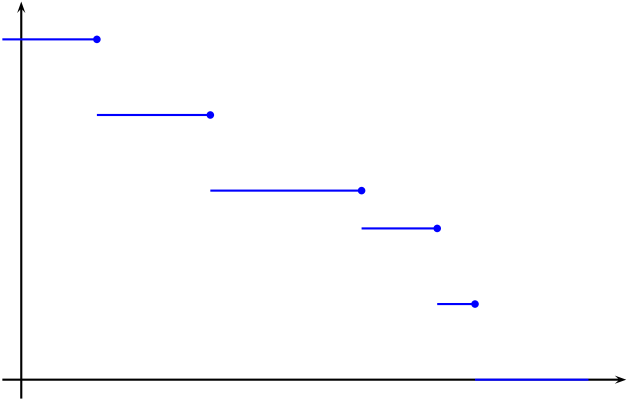


Preuve en image

Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \mathbb{P}(X \geq x)$.

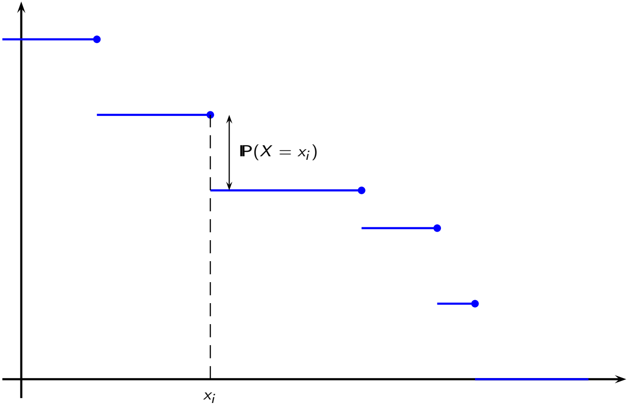
Preuve en image

Représentation graphique de la fonction G

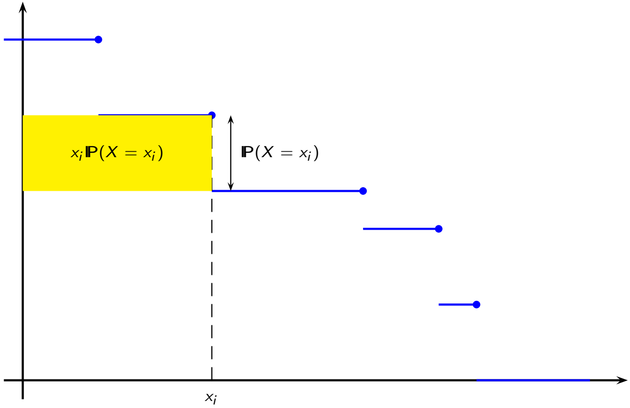


Preuve en image

Représentation graphique de la fonction G

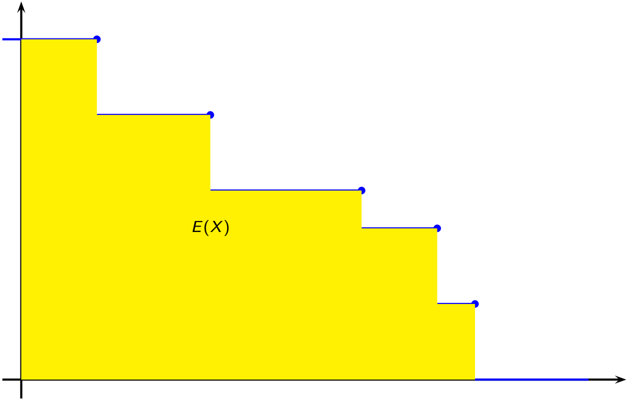


Preuve en image



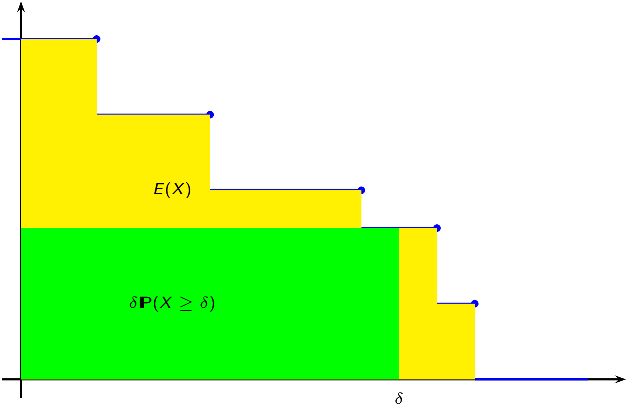
Preuve en image

Représentation graphique de $E(X)$



Preuve en image

Comparaison entre $E(X)$ et $\delta \mathbb{P}(X \geq \delta)$



Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

- Irénée-Jules Bienaymé (1796-1878) a obtenu le résultat en 1853.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

- Irénée-Jules Bienaymé (1796-1878) a obtenu le résultat en 1853.
- Pafnouti Tchebychev (1821-1894) l'a obtenu en 1867.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Propriété : Soit X une variable aléatoire admettant une espérance μ et une variance V. Pour tout $\delta > 0$, on a

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{\delta^2}.$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Propriété : Soit X une variable aléatoire admettant une espérance μ et une variance V. Pour tout $\delta > 0$, on a

$$\mathbb{P}(|X-\mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{\delta^2}.$$

Démonstration : On applique l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $(X-\mu)^2$.

Remarques

Remarque 1 : Cette inégalité n'a d'intérêt que pour $\delta > \sigma = \sqrt{V}$.

Remarques

Remarque 1 : Cette inégalité n'a d'intérêt que pour $\delta > \sigma = \sqrt{V}$.

Remarque 2 : Cette inégalité est dite *inégalité de concentration*.

Remarques

Remarque 1 : Cette inégalité n'a d'intérêt que pour $\delta > \sigma = \sqrt{V}$.

Remarque 2 : Cette inégalité est dite *inégalité de concentration*. Elle donne un intervalle de fluctuation pour X,

$$]\mu - \delta, \mu + \delta[$$

de niveau $1 - \dfrac{V}{\delta^2}$.

Première application

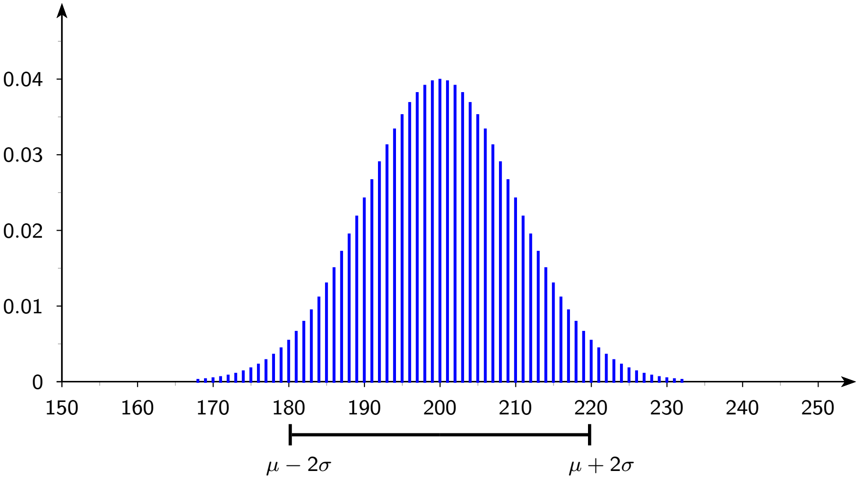
Soit X une variable aléatoire admettant une variance. On note μ son espérance et σ^2 sa variance.

Première application

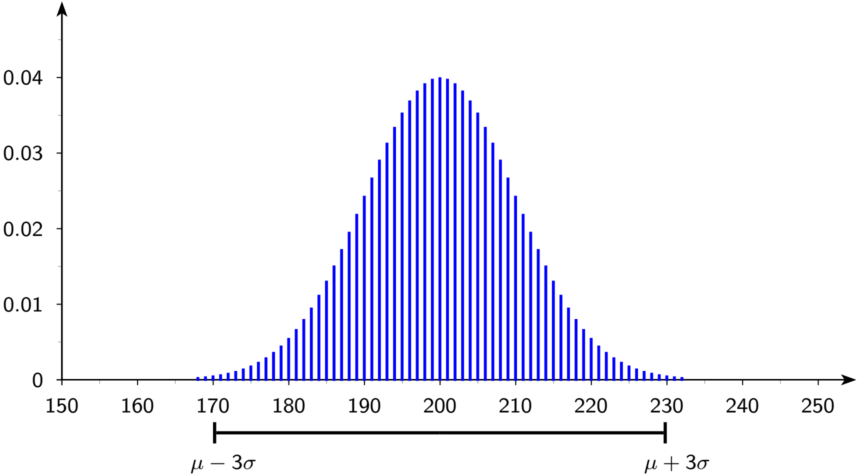
Soit X une variable aléatoire admettant une variance. On note μ son espérance et σ^2 sa variance.

On souhaite estimer $\mathbb{P}(X \in]\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma[)$ et $\mathbb{P}(X \in]\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma[)$.

Première application



Première application



Première application

Soit X une variable aléatoire admettant une variance. On note μ son espérance et σ^2 sa variance.

Par l'inégalité de BT, on obtient :

Première application

Soit X une variable aléatoire admettant une variance. On note μ son espérance et σ^2 sa variance.

Par l'inégalité de BT, on obtient :

$$\mathbb{P}(X \in]\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma[)$$

Première application

Soit X une variable aléatoire admettant une variance. On note μ son espérance et σ^2 sa variance.

Par l'inégalité de BT, on obtient :

$$\mathbb{P}(X \in]\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma[) = \mathbb{P}(|X - \mu| < 2\sigma)$$

Première application

Soit X une variable aléatoire admettant une variance. On note μ son espérance et σ^2 sa variance.

Par l'inégalité de BT, on obtient :

$$\mathbb{P}(X \in]\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma[) = \mathbb{P}(|X - \mu| < 2\sigma) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{4\sigma^2}$$

Première application

Soit X une variable aléatoire admettant une variance. On note μ son espérance et σ^2 sa variance.

Par l'inégalité de BT, on obtient :

$$\mathbb{P}(X \in]\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma[) = \mathbb{P}(|X - \mu| < 2\sigma) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{4\sigma^2} = \frac{3}{4}$$

Première application

Soit X une variable aléatoire admettant une variance. On note μ son espérance et σ^2 sa variance.

Par l'inégalité de BT, on obtient :

$$\mathbb{P}(X \in]\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma[) = \mathbb{P}(|X - \mu| < 2\sigma) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{4\sigma^2} = \frac{3}{4}$$

et

$$\mathbb{P}(X \in]\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma[)$$

Première application

Soit X une variable aléatoire admettant une variance. On note μ son espérance et σ^2 sa variance.

Par l'inégalité de BT, on obtient :

$$\mathbb{P}(X \in]\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma[) = \mathbb{P}(|X - \mu| < 2\sigma) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{4\sigma^2} = \frac{3}{4}$$

et

$$\mathbb{P}(X \in]\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma[) = \mathbb{P}(|X - \mu| < 3\sigma)$$

Première application

Soit X une variable aléatoire admettant une variance. On note μ son espérance et σ^2 sa variance.

Par l'inégalité de BT, on obtient :

$$\mathbb{P}(X \in]\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma[) = \mathbb{P}(|X - \mu| < 2\sigma) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{4\sigma^2} = \frac{3}{4}$$

et

$$\mathbb{P}(X \in]\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma[) = \mathbb{P}(|X - \mu| < 3\sigma) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{9\sigma^2}$$

Première application

Soit X une variable aléatoire admettant une variance. On note μ son espérance et σ^2 sa variance.

Par l'inégalité de BT, on obtient :

$$\mathbb{P}(X \in]\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma[) = \mathbb{P}(|X - \mu| < 2\sigma) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{4\sigma^2} = \frac{3}{4}$$

et

$$\mathbb{P}(X \in]\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma[) = \mathbb{P}(|X - \mu| < 3\sigma) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{9\sigma^2} = \frac{8}{9}.$$

Limite de l’inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Limite de l’inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Il s’agit d’une majoration grossière.

Limite de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Il s'agit d'une majoration grossière.

Exemple : soit $X \sim \mathcal{B}(400\ ;\ 0,5)$.

Limite de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Il s'agit d'une majoration grossière.

Exemple : soit $X \sim \mathcal{B}(400\ ;\ 0,5)$.

Par l'inégalité de BT, on $\mathbb{P}(X \in]\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma[) \geq 0,75$

Limite de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Il s'agit d'une majoration grossière.

Exemple : soit $X \sim \mathcal{B}(400\ ;\ 0,5)$.

Par l'inégalité de BT, on $\mathbb{P}(X \in]\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma[) \geq 0,75$

alors que le calcul nous donne

Limite de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Il s'agit d'une majoration grossière.

Exemple : soit $X \sim \mathcal{B}(400\ ;\ 0,5)$.

Par l'inégalité de BT, on $\mathbb{P}(X \in]\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma[) \geq 0,75$

alors que le calcul nous donne

$$\mathbb{P}(X \in]\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma[) \approx 0,95.$$

Application : Inégalité de concentration pour la moyenne empirique

On considère une suite (X_n) de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité, deux à deux indépendantes, de même loi, admettant une espérance μ et une variance V.

Application : Inégalité de concentration pour la moyenne empirique

On considère une suite (X_n) de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité, deux à deux indépendantes, de même loi, admettant une espérance μ et une variance V.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $M_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$.

Application : Inégalité de concentration pour la moyenne empirique

On considère une suite (X_n) de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité, deux à deux indépendantes, de même loi, admettant une espérance μ et une variance V.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $M_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$.

On a $E(S_n)$

Application : Inégalité de concentration pour la moyenne empirique

On considère une suite (X_n) de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité, deux à deux indépendantes, de même loi, admettant une espérance μ et une variance V.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $M_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$.

On a $E(S_n) = n\mu$

Application : Inégalité de concentration pour la moyenne empirique

On considère une suite (X_n) de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité, deux à deux indépendantes, de même loi, admettant une espérance μ et une variance V.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $M_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$.

On a $E(S_n) = n\mu$ puis $E(M_n)$

Application : Inégalité de concentration pour la moyenne empirique

On considère une suite (X_n) de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité, deux à deux indépendantes, de même loi, admettant une espérance μ et une variance V.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $M_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$.

On a $E(S_n) = n\mu$ puis $E(M_n) = \frac{1}{n}E(S_n)$

Application : Inégalité de concentration pour la moyenne empirique

On considère une suite (X_n) de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité, deux à deux indépendantes, de même loi, admettant une espérance μ et une variance V.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $M_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$.

On a $E(S_n) = n\mu$ puis $E(M_n) = \frac{1}{n}E(S_n) = \mu$.

Application : Inégalité de concentration pour la moyenne empirique

On considère une suite (X_n) de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité, deux à deux indépendantes, de même loi, admettant une espérance μ et une variance V.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $M_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$.

On a $E(S_n) = n\mu$ puis $E(M_n) = \frac{1}{n}E(S_n) = \mu$.

Et $V(S_n)$

Application : Inégalité de concentration pour la moyenne empirique

On considère une suite (X_n) de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité, deux à deux indépendantes, de même loi, admettant une espérance μ et une variance V.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $M_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$.

On a $E(S_n) = n\mu$ puis $E(M_n) = \frac{1}{n}E(S_n) = \mu$.

Et $V(S_n) = nV$

Application : Inégalité de concentration pour la moyenne empirique

On considère une suite (X_n) de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité, deux à deux indépendantes, de même loi, admettant une espérance μ et une variance V.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $M_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$.

On a $E(S_n) = n\mu$ puis $E(M_n) = \frac{1}{n}E(S_n) = \mu$.

Et $V(S_n) = nV$ puis $V(M_n)$

Application : Inégalité de concentration pour la moyenne empirique

On considère une suite (X_n) de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité, deux à deux indépendantes, de même loi, admettant une espérance μ et une variance V.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $M_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$.

On a $E(S_n) = n\mu$ puis $E(M_n) = \frac{1}{n}E(S_n) = \mu$.

Et $V(S_n) = nV$ puis $V(M_n) = \frac{1}{n^2}V(S_n)$

Application : Inégalité de concentration pour la moyenne empirique

On considère une suite (X_n) de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité, deux à deux indépendantes, de même loi, admettant une espérance μ et une variance V.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $M_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$.

On a $E(S_n) = n\mu$ puis $E(M_n) = \frac{1}{n}E(S_n) = \mu$.

Et $V(S_n) = nV$ puis $V(M_n) = \frac{1}{n^2}V(S_n) = \frac{V}{n}$.

Application : Inégalité de concentration pour la moyenne empirique

On considère une suite (X_n) de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité, deux à deux indépendantes, de même loi, admettant une espérance μ et une variance V.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $M_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$.

On a $E(M_n) = \mu$ et $V(M_n) = \frac{V}{n}$.

Application : Inégalité de concentration pour la moyenne empirique

On considère une suite (X_n) de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité, deux à deux indépendantes, de même loi, admettant une espérance μ et une variance V.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $M_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$.

On a $E(M_n) = \mu$ et $V(M_n) = \frac{V}{n}$.

Par l'inégalité de BT, on obtient,

Application : Inégalité de concentration pour la moyenne empirique

On considère une suite (X_n) de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité, deux à deux indépendantes, de même loi, admettant une espérance μ et une variance V.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $M_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$.

On a $E(M_n) = \mu$ et $V(M_n) = \frac{V}{n}$.

Par l'inégalité de BT, on obtient, pour tout $\delta > 0$,

$$\mathbb{P}(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{n\delta^2}.$$

Cas particulier : Variables aléatoires de loi de Bernoulli

On considère une suite (X_n) de variables aléatoires deux à deux indépendantes et de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0, 1[$.

Cas particulier : Variables aléatoires de loi de Bernoulli

On considère une suite (X_n) de variables aléatoires deux à deux indépendantes et de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0, 1[$.

On a $E(M_n) = p$ et $V(M_n) = \frac{p(1-p)}{n}$.

Cas particulier : Variables aléatoires de loi de Bernoulli

On considère une suite (X_n) de variables aléatoires deux à deux indépendantes et de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0, 1[$.

On a $E(M_n) = p$ et $V(M_n) = \frac{p(1-p)}{n}$.

Par l'inégalité de BT, on obtient, pour tout $\delta > 0$,

$$\mathbb{P}(|M_n - p| \geq \delta) \leq \frac{p(1-p)}{n\delta^2} \leq \frac{1}{4n\delta^2}.$$

Exercice en terminale (1)

On lance 3600 fois un dé équilibré à six faces. On souhaite minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du chiffre 1 soit compris entre 480 et 720.

Soit S la variable aléatoire comptant le nombre d'apparitions du chiffre 1 au cours de ces lancers.

Exercice en terminale (1)

On lance 3600 fois un dé équilibré à six faces. On souhaite minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du chiffre 1 soit compris entre 480 et 720.

Soit S la variable aléatoire comptant le nombre d'apparitions du chiffre 1 au cours de ces lancers.

1. Loi de S.

Exercice en terminale (1)

On lance 3600 fois un dé équilibré à six faces. On souhaite minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du chiffre 1 soit compris entre 480 et 720.

Soit S la variable aléatoire comptant le nombre d'apparitions du chiffre 1 au cours de ces lancers.

1. Loi de S.
2. Calcul de $E(S)$ et $V(S)$.

Exercice en terminale (1)

On lance 3600 fois un dé équilibré à six faces. On souhaite minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du chiffre 1 soit compris entre 480 et 720.

Soit S la variable aléatoire comptant le nombre d'apparitions du chiffre 1 au cours de ces lancers.

1. Loi de S.
2. Calcul de $E(S)$ et $V(S)$.
3. $480 < S < 720 \iff |S - 600| < 120$.

Exercice en terminale (1)

On lance 3600 fois un dé équilibré à six faces. On souhaite minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du chiffre 1 soit compris entre 480 et 720.

Soit S la variable aléatoire comptant le nombre d'apparitions du chiffre 1 au cours de ces lancers.

1. Loi de S.
2. Calcul de $E(S)$ et $V(S)$.
3. $480 < S < 720 \iff |S - 600| < 120$.
4. Inégalité de B.T. $\rightarrow P\left(480 < S < 720\right) \geq 0,96$.

Exercice en terminale (2)

On effectue une suite de lancers d'un dé à quatre faces. Quel nombre de lancers suffit-il pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5 % que la fréquence d'apparition du 4 est strictement comprise entre $0,24$ et $0,26$?

On pose

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le dé tombe sur 4 au lancer numéro } i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note M_n la fréquence d'apparition du 4 au cours des n premiers lancers.

Exercice en terminale (2)

On effectue une suite de lancers d'un dé à quatre faces. Quel nombre de lancers suffit-il pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5 % que la fréquence d'apparition du 4 est strictement comprise entre $0,24$ et $0,26$?
On pose

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le dé tombe sur 4 au lancer numéro } i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note M_n la fréquence d'apparition du 4 au cours des n premiers lancers.

1. Espérance et variance de chacune des X_i.

Exercice en terminale (2)

On effectue une suite de lancers d'un dé à quatre faces. Quel nombre de lancers suffit-il pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5 % que la fréquence d'apparition du 4 est strictement comprise entre $0,24$ et $0,26$?
On pose

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le dé tombe sur 4 au lancer numéro } i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note M_n la fréquence d'apparition du 4 au cours des n premiers lancers.

1. Espérance et variance de chacune des X_i.
2. Expression de M_n en fonction des X_i.

Exercice en terminale (2)

On effectue une suite de lancers d'un dé à quatre faces. Quel nombre de lancers suffit-il pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5 % que la fréquence d'apparition du 4 est strictement comprise entre $0,24$ et $0,26$?
On pose

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le dé tombe sur 4 au lancer numéro } i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note M_n la fréquence d'apparition du 4 au cours des n premiers lancers.

1. Espérance et variance de chacune des X_i.
2. Expression de M_n en fonction des X_i.
3. On cherche n tel que $P\left(|M_n - 0,25| < 0,01\right) \geq 0,95$.

Exercice en terminale (2)

On effectue une suite de lancers d'un dé à quatre faces. Quel nombre de lancers suffit-il pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5 % que la fréquence d'apparition du 4 est strictement comprise entre $0,24$ et $0,26$?
On pose

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le dé tombe sur 4 au lancer numéro } i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note M_n la fréquence d'apparition du 4 au cours des n premiers lancers.

1. Espérance et variance de chacune des X_i.
2. Expression de M_n en fonction des X_i.
3. On cherche n tel que $P\left(|M_n - 0,25| < 0,01\right) \geq 0,95$.
4. Inégalité de concentration $\rightarrow$ Valeur de n.

Intervalle de confiance : le problème

On lance 1000 fois une pièce de monnaie dont on ne sait pas si elle est équilibrée.

Intervalle de confiance : le problème

On lance 1000 fois une pièce de monnaie dont on ne sait pas si elle est équilibrée.
On note p la probabilité de tomber sur *pile*.

Intervalle de confiance : le problème

On lance 1000 fois une pièce de monnaie dont on ne sait pas si elle est équilibrée.
On note p la probabilité de tomber sur *pile*.
On obtient 540 fois *pile*.

Intervalle de confiance : le problème

On lance 1000 fois une pièce de monnaie dont on ne sait pas si elle est équilibrée.
On note p la probabilité de tomber sur *pile*.
On obtient 540 fois *pile*.

Donner un intervalle de confiance pour p au niveau 0,95.

Intervalle de confiance : la modélisation

Pour tout entier i strictement positif, notons la variable aléatoire X_i prenant la valeur 1 si on obtient *pile* au i-ième lancer et prenant la valeur 0 sinon.

Intervalle de confiance : la modélisation

Pour tout entier i strictement positif, notons la variable aléatoire X_i prenant la valeur 1 si on obtient *pile* au i-ième lancer et prenant la valeur 0 sinon.
Alors pour tout i, $X_i \sim \mathcal{B}(p)$.

Intervalle de confiance : la modélisation

Pour tout entier i strictement positif, notons la variable aléatoire X_i prenant la valeur 1 si on obtient *pile* au i-ième lancer et prenant la valeur 0 sinon.
Alors pour tout i, $X_i \sim \mathcal{B}(p)$.

Notons $M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ la proportion de *pile* obtenue après n lancers.

Intervalle de confiance : la modélisation

Pour tout entier i strictement positif, notons la variable aléatoire X_i prenant la valeur 1 si on obtient *pile* au i-ième lancer et prenant la valeur 0 sinon.
Alors pour tout i, $X_i \sim \mathcal{B}(p)$.

Notons $M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ la proportion de *pile* obtenue après n lancers.

Le problème consiste à trouver δ tel que

$$\mathbb{P}(|M_{1000} - p| < \delta) \geq 0,95.$$

Intervalle de confiance : la résolution

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a

Intervalle de confiance : la résolution

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a

$$\mathbb{P}(|M_{1000} - p| < \delta) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{1000\delta^2} \geq 1 - \frac{1}{4000\delta^2}.$$

Intervalle de confiance : la résolution

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a

$$\mathbb{P}(|M_{1000} - p| < \delta) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{1000\delta^2} \geq 1 - \frac{1}{4000\delta^2}.$$

Il suffit donc de choisir δ tel que

$$1 - \frac{1}{4000\delta^2} \geq 0,95.$$

Intervalle de confiance : la résolution

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a

$$\mathbb{P}(|M_{1000} - p| < \delta) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{1000\delta^2} \geq 1 - \frac{1}{4000\delta^2}.$$

Il suffit donc de choisir δ tel que

$$1 - \frac{1}{4000\delta^2} \geq 0,95.$$

C'est-à-dire

$$\delta \geq \frac{1}{\sqrt{4000 \times 0,05}}$$

Intervalle de confiance : la résolution

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a

$$\mathbb{P}(|M_{1000} - p| < \delta) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{1000\delta^2} \geq 1 - \frac{1}{4000\delta^2}.$$

Il suffit donc de choisir δ tel que

$$1 - \frac{1}{4000\delta^2} \geq 0,95.$$

C'est-à-dire

$$\delta \geq \frac{1}{\sqrt{4000 \times 0,05}} = \frac{1}{10\sqrt{2}}$$

Intervalle de confiance : la résolution

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a

$$\mathbb{P}(|M_{1000} - p| < \delta) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{1000\delta^2} \geq 1 - \frac{1}{4000\delta^2}.$$

Il suffit donc de choisir δ tel que

$$1 - \frac{1}{4000\delta^2} \geq 0,95.$$

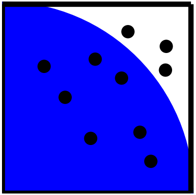
C'est-à-dire

$$\delta \geq \frac{1}{\sqrt{4000 \times 0,05}} = \frac{1}{10\sqrt{2}} \approx 0,07.$$

Intervalle de confiance : la conclusion

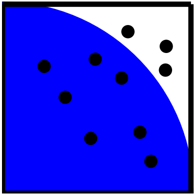
L'intervalle $[0,54 - 0,08; 0,54 + 0,08]$ est un intervalle de confiance pour p au niveau 0,95.

Méthode de Monte-Carlo



$$M_n = \frac{S_n}{n} = \text{prop. de points dans le quart de disque}$$

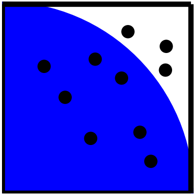
Méthode de Monte-Carlo



$M_n = \frac{S_n}{n} =$ prop. de points dans le quart de disque

- $\pi \approx 4 \times M_n$

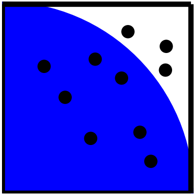
Méthode de Monte-Carlo



$$M_n = \frac{S_n}{n} = \text{prop. de points dans le quart de disque}$$

- $\pi \approx 4 \times M_n$
- $S_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{\pi}{4}\right)$

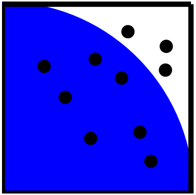
Méthode de Monte-Carlo



$M_n = \frac{S_n}{n} =$ prop. de points dans le quart de disque

- $\pi \approx 4 \times M_n$
- $S_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{\pi}{4}\right)$
  - $P\left(\left|M_n - \frac{\pi}{4}\right| < \delta\right) \geq 1 - \frac{1}{4n\delta^2}$

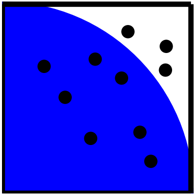
Méthode de Monte-Carlo



$M_n = \frac{S_n}{n} =$ prop. de points dans le quart de disque

- $\pi \approx 4 \times M_n$
- $S_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{\pi}{4}\right)$
  - $P\left(\left|M_n - \frac{\pi}{4}\right| < \delta\right) \geq 1 - \frac{1}{4n\delta^2}$
  - Il faut $100 \times$ plus de temps pour avoir la 2e décimale que pour avoir la 1re

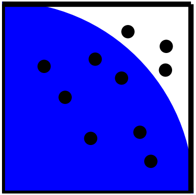
Méthode de Monte-Carlo



$M_n = \frac{S_n}{n} =$ prop. de points dans le quart de disque

- $\pi \approx 4 \times M_n$
- $S_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{\pi}{4}\right)$
  - $P\left(\left|M_n - \frac{\pi}{4}\right| < \delta\right) \geq 1 - \frac{1}{4n\delta^2}$
  - Il faut 100 $\times$ plus de temps pour avoir la 2e décimale que pour avoir la 1re
- Problème annexe : temps pour remplir l'écran ?

Méthode de Monte-Carlo



$M_n = \frac{S_n}{n}$ = prop. de points dans le quart de disque

- $\pi \approx 4 \times M_n$
- $S_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{\pi}{4}\right)$
  - $P\left(\left|M_n - \frac{\pi}{4}\right| < \delta\right) \geq 1 - \frac{1}{4n\delta^2}$
  - Il faut 100 $\times$ plus de temps pour avoir la 2e décimale que pour avoir la 1re
- Problème annexe : temps pour remplir l'écran ?
  - Loi géométrique et série harmonique

Convergence en probabilité

Définition : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires et soit X une variable aléatoire toutes définies sur un même espace de probabilité. On dit que X_n converge en probabilité vers X si

$$\forall \epsilon > 0, \quad \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0.$$

Convergence en probabilité

Définition : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires et soit X une variable aléatoire toutes définies sur un même espace de probabilité. On dit que X_n converge en probabilité vers X si

$$\forall \epsilon > 0, \qquad \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0.$$

On note $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}} X$.

Loi faible des grands nombres

Théorème : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité, deux à deux indépendantes, de même loi admettant une espérance μ et une variance. Alors on a

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \mu.$$

Loi faible des grands nombres

Théorème : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité, deux à deux indépendantes, de même loi admettant une espérance μ et une variance. Alors on a

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \mu.$$

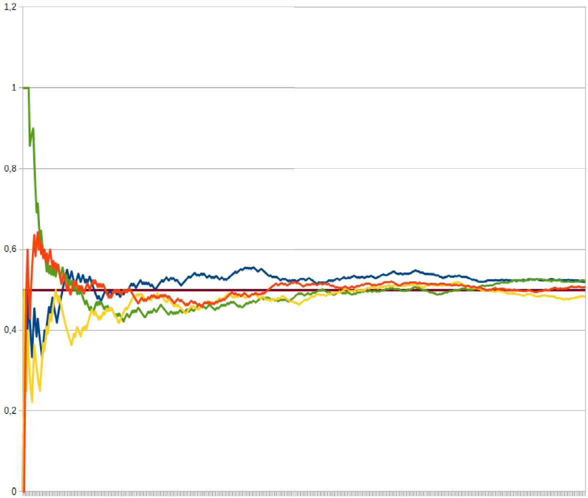
Remarque : L'inégalité de Bienaymé Tchebychev précise la vitesse de convergence.

Application dans le cas du schéma de Bernoulli

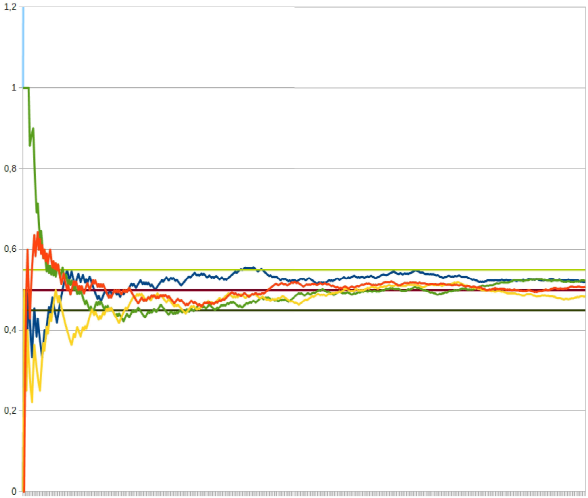
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité, deux à deux indépendantes, dont la loi est la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Alors on a

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} p.$$

Illustration



Illustration



Résumé

- Dénombrement.

Résumé

- Dénombrement.
- Espérance et variance d'une somme/d'une comb. lin.

Résumé

- Dénombrement.
- Espérance et variance d'une somme/d'une comb. lin.
- Somme et moyenne d'un échantillon.

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$
$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

Résumé

- Dénombrement.
- Espérance et variance d'une somme/d'une comb. lin.
- Somme et moyenne d'un échantillon.

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$
$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

- Loi binomiale

Résumé

- Dénombrement.
- Espérance et variance d'une somme/d'une comb. lin.
- Somme et moyenne d'un échantillon.

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$
$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

- Loi binomiale
- ~~Loi normale~~

Résumé

- Dénombrement.
- Espérance et variance d'une somme/d'une comb. lin.
- Somme et moyenne d'un échantillon.

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$
$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

- Loi binomiale
- ~~Loi normale~~
- Inégalité de B.T. et applications

Résumé

- Dénombrement.
- Espérance et variance d'une somme/d'une comb. lin.
- Somme et moyenne d'un échantillon.

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$
$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

- Loi binomiale
- ~~Loi normale~~
- Inégalité de B.T. et applications
  - Inégalité de concentration, loi binomiale, stat., LGN