Laboratoire de Matériaux Céramiques et de Mathématiques
DÉPARTEMENT MATHÉMATIQUES

Axe Analyse et Équations aux Dérivées Partielles

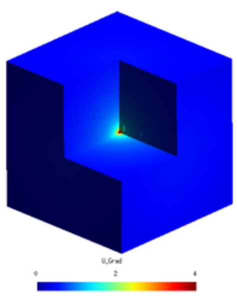
Membres de l'axe :

Mohammad Akil
Felix Ali-Mehmeti
Séverine Biard
Maryse Bourlard-Jospin
Madeline Chauvier
Colette De Coster
Damien Galant
Hiba Hmede
Abderrahman Maghnouji
Serge Nicaise
Luc Paquet
Virginie Régnier
Hussein Saleh
Farah Trad
Juliette Venel

Présentation :

Le Département Mathématiques du CERAMATHS exerce une activité de recherche en analyse des équations aux dérivées partielles, qui couvre un large spectre de thématiques tant théoriques qu'appliquées. Le choix des équations est varié (statiques, dynamiques, inclusions différentielles, équations non linéaires). Nous nous intéressons en particulier à l'étude du comportement au bord des domaines (singularités de coins, d'arêtes, fissurations, couches limites), au contrôle et la stabilisation de systèmes dynamiques. Les applications sont nombreuses : électromagnétisme, mécanique quantique, mouvement de foule, écoulement granulaire, etc.

Singularités des solutions d'EDP posées dans des domaines non réguliers



En mécanique, la singularité désigne l'endroit où la valeur de la contrainte est infinie. Ce phénomène peut être induit par des points singuliers du domaine (coins, arêtes, discontinuité de certains coefficients) ou par des données sous forme de Dirac. Le but est donc de décrire de manière précise les singularités des solutions de problèmes aux limites linéaires ou non-linéaires (et même des problèmes d'obstacle) posés dans des domaines à points singuliers ou avec données sous forme de Dirac. Les applications sont nombreuses : par exemple une description précise des singularités permet de construire des schémas numériques adaptés et d'établir des critères de propagation de fissure.

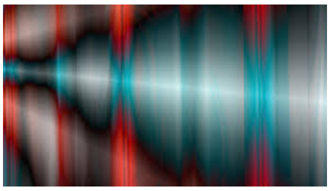
Ces recherches se font en collaboration avec différents laboratoires en France ou à l'étranger : Institut de recherche mathématique de Rennes, équipe-projet Inria Atlantis (Inria Nice), Institut für Mathematik und Computergestützte Simulation (Universität der Bundeswehr München, Allemagne) et le Dept. Mathematik/Informatik de l'Universität zu Köln (Allemagne).

EDP sur les Multistructures

L'étude d'EDP sur des multistructures apparaît dans de nombreuses applications, par exemple en neurobiologie, en électronique et en mécanique. Ce type de problème se caractérise par un système d'EDP sur chaque composante de la multistructure, couplées par des conditions de transmission apparaissant entre ces composantes. Les questions à résoudre sont multiples: modélisation, existence, régularité, théorie spectrale, développement asymptotique, contrôle, représentation explicite, asymptotique en temps, asymptotique en espace au voisinage des singularités, effet tunnel, etc. Une attention particulière est portée à l'obtention d'informations structurelles et analytiques sur des modèles de systèmes physiques, qui sont constitués de plusieurs milieux interagissant et le raffinement de méthodes asymptotiques du type phase stationnaire en vue de leurs applications à des phénomènes dispersifs.

Ces recherches se font en collaboration avec différents laboratoires étrangers: Research group Analysis (TU Darmstadt, Allemagne), Laboratoire de recherche analyse et contrôle des équations aux dérivées partielles (Université de Monastir, Tunisie), Lehrgebiet Analysis (Fern-Universität in Hagen, Allemagne) et Institute of Mathematics, Physics, and Mechanics (University of Ljubljana, Slovénie).

Contrôle et stabilisation de systèmes d'EDP



La stabilisation de différents systèmes d'EDP du type hyperbolique avec amortissements linéaires ou non-linéaires a de nombreuses applications (réduction du bruit, dynamique des structures, automatique par exemple). Le but est d'établir des résultats précis de décroissance de l'énergie en fonction de l'amortissement considéré.

Le contrôle optimal de certaines EDP non-linéaires nous permet d'aborder des problèmes plus appliqués. Une première question concerne le modèle de l'évolution de la température à l'intérieur d'un corps semi-transparent en agissant sur la température de la source radiative noire. Ce problème nous amène à l'étude du contrôle optimal d'EDPs de type parabolique ou de la viscoélasticité couplées avec l'équation de transfert radiatif ou avec les équations de Maxwell. Un deuxième problème concerne la trajectoire optimale et la puissance optimale d'un laser minimisant les gradients de température dans la fabrication additive par fusion sur lit de poudre métallique.

Ces recherches se font en collaboration avec différents laboratoires en France ou à l'étranger: Institut Elie Cartan de Lorraine (Nancy), Khawarizmi Laboratory of Mathematics and Applications-KALMA (Université Libanaise, Beyrouth, Liban), DISIM (Università degli Studi dell'Aquila, Italie), Laboratoire de Mathématiques et Informatique (Université Joseph KI-ZERBO, Burkina Faso) et Unité de recherche analyse et contrôle des équations aux dérivées partielles (Université de Monastir, Tunisie).

EDP non-linéaires

Notre compréhension des phénomènes du monde réel et notre technologie sont aujourd'hui en grande partie basées sur les équations aux dérivées partielles non linéaires. Ces équations ne pouvant être résolues explicitement, nous nous concentrons sur l'étude qualitative des solutions de telles équations. Les questions que nous nous posons sont nombreuses: existence, unicité et multiplicité des solutions, dépendance de la solution par rapport à un paramètre de l'équation, localisation de la solution, propriétés des solutions du style: positivité, zones nodales, symétrie mais aussi stabilité ...

De façon plus précise, les problèmes étudiés sont les équations elliptiques semi-linéaires avec dépendance critique dans le gradient, les équations de courbure moyenne anisotropique, les problèmes résonants-superlinéaires, l'équation de courbure moyenne dans des espaces de Lorentz-Minkowski, l'étude spectrale d'un problème de buckling généralisé. Une attention toute particulière est portée aux équations posées sur un graphe qui sont des modèles pour les fibres optiques ou le condensat de Bose-Einstein.

Ces recherches se font en collaboration avec différents laboratoires en France ou à l'étranger : laboratoire de mathématiques de Besançon, Dipartimento di Matematica dell'Università di Trieste (Italie), LMPA (Université du Littoral Côte d'Opale), Départements de Mathématique de l'Université libre de Bruxelles et de l'UMons (Belgique), Politecnico di Torine (Italie).

Inclusions différentielles et régularité métrique

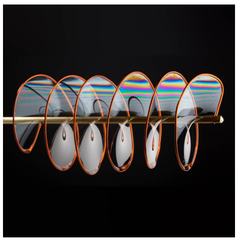
Les inclusions différentielles sont des problèmes d'évolution où la variable d'état doit rester dans un ensemble à chaque instant. Elles apparaissent dans de nombreux domaines comme la mécanique, l'économie ou l'électricité.

Par exemple, en mécanique, quand on considère des particules rigides, le fait que ces dernières ne puissent pas s'interpénétrer, transforme les équations différentielles classiques (obtenues par application du principe fondamental de la dynamique), en inclusions différentielles. Les questions dans ce cadre sont multiples : au premier ordre, caractère bien posé dans les espaces de Banach, sur des variétés riemanniennes, dans un Hilbert avec une perturbation stochastique ; au second ordre, existence de solutions et applications au problème d'écoulements granulaires avec contacts inélastiques.
Du côté numérique, on peut construire des solutions approchées de certaines inclusions différentielles du premier ordre et prouver leur convergence en se reposant sur des résultats de régularité métrique. Ces derniers sont donc fondamentaux en optimisation et en analyse convexe et font encore l'objet de travaux récents.

EDP à frontières libres et Transport Optimal

Il s'agit d'étudier le caractère bien posé d'un problème d'équation aux dérivées partielles à frontières libres modélisant un phénomène de corrosion. La difficulté vient de la présence d'une interface mobile, liée à l'évolution de la couche d'oxyde et à travers laquelle des échanges de porteurs de charges ont lieu. Ce travail est mené en collaboration avec le laboratoire Paul Painlevé de l'université de Lille et l'équipe RAPSODI de INRIA Lille-Nord-Europe.

Approximation Holomorphe dans les espaces L2 à poids



La théorie de l'approximation holomorphe joue un rôle fondamental en analyse complexe, en dynamique holomorphe, dans la théorie des surfaces minimales et dans bien d'autres branches mathématiques. C'est un outil qui permet la construction d'applications holomorphes avec de bonnes propriétés entre les variétés complexes. Le projet mené conjointement avec l'Université NTNU à Trondheim en Norvège et à l'Université Sun Yat-Sen en Chine consiste à généraliser les théorèmes d'approximation holomorphe classique, comme ceux de Mergelyan, Runge, Weierstrass à l'espace L2 à poids dans un cadre général où la fonction poids est une fonction plurisouharmonique pouvant admettre des singularités. Outre les résultats d'approximation obtenus, ce projet encourage l'introduction de nouvelles techniques et de nouveaux résultats en théorie du pluripotentiel.