Laboratoire de Matériaux Céramiques et de Mathématiques
DÉPARTEMENT MATHÉMATIQUES

Axe Géométrie

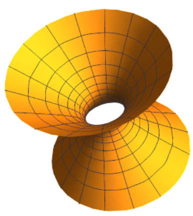
Membres de l'axe :

Mateo Anarella
Séverine Biard
Olivier Birembaux
Aziz El Kacimi
Abdelhak Kabila
Christian Ohn
Lucas Reding
Anne-Joëlle Vanderwinden
Luc Vrancken
Georges Zafindratafa
Abdellatif Zeggar

Présentation :

Le Département Mathématiques du CERAMATHS exerce une activité de recherche en Géométrie, dans les thématiques suivantes :

Sous variétés des espaces Kähleriens et presque Kähleriens

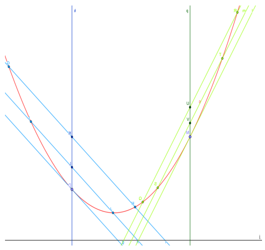


On peut considérer les sous-variétés comme des généralisations de courbes et de surfaces dans l'espace euclidien. Dans la théorie générale, les dimensions des objets peuvent être arbitraires et le l'espace ambiant n'a pas besoin d'être plat. Bien que les sous-variétés soient des objets locaux dans leur espace ambiant, elles peuvent encoder beaucoup d'informations sur leur géométrie. En effet, si l'on considère une classe de sous-variétés adaptées en un certain sens à une structure géométrique sur l'espace ambiant, la quantité de structures éventuellement induites, la taille de la classe de ces sous-variétés et leurs propriétés fournissent des informations précieuses. Il est donc intéressant et important d'étudier les caractérisations, les constructions et les classifications de ces classes de sous-variétés. En particulier de bien comprendre les relations entre les propriétés intrinsèques (qui dépendent seulement de la variété elle-même comme par exemple la courbure de Gauss) et les propriétés extrinsèques (comme la courbure moyenne). Plus précisément, dans ce projet, il y a deux composantes: d'un côté une étude théorique des sous-variétés presque complexes et lagrangiennes, et d'un autre côté celle d'une variété Kählerienne ou presque Kählerienne (dont on a trouvé récemment des applications dans la théorie de la physique mathématique).

Théorie du pluripotentiel et applications à l'approximation holomorphe et aux ensembles stables des feuilletages holomorphes

La théorie du pluripotentiel, généralisation de la théorie du potentiel aux variétés complexes (compactes) repose sur la notion de courants positifs et re-définit les ensembles analytiques. Elle crée un pont entre différentes branches de la géométrie complexe et de l'analyse complexe à plusieurs variables, via la théorie des fonctions plurisousharmoniques. Nous utilisons cette théorie dans l'étude de l'approximation holomorphe par des polynômes dans l'espace complexe. Cette théorie est une composante essentielle à l'étude des feuilletages holomorphes et leurs propriétés dynamiques. Par exemple, elle s'exprime dans les estimées L^2 pour l'opérateur d-bar et dans les applications aux variétés CR, notamment aux ensembles stables des feuilletages holomorphes de codimension 1.

Géométrie différentielle affine



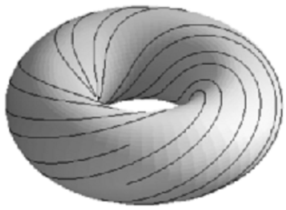
Dans ce domaine on étudie les sous-variétés M dans R^{n+1}. Cette étude fait partie du programme de Felix Klein, c'est-à-dire la géométrie est l'étude des propriétés qui restent invariantes sous l'action d'un groupe donné de transformations. L'étude de la géométrie différentielle affine commence par le travail de Blaschke et de ses collègues au début du siècle dernier. On peut faire encore une distinction entre la géométrie différentielle centroaffine (pour laquelle on prend comme groupe le groupe linéaire de dimension n+1) et la géométrie equiaffine (où on considère comme groupe l'ensemble des transformations de R^{n+1} qui préservent le volume). Les 50 dernières années, beaucoup de géomètres célèbres tels que Bobenko, Calabi, Chern, Nomizu, Pinkall, Sasaki, Simon, Terng, Trudinger et Yau ont contribué à ces géométries. Dans les deux cas beaucoup de propriétés géométriques sont encodées dans ce qu'on appelle le tenseur de différence K et dans l'opérateur de forme S. Le but de recherche est de comprendre comment les propriétés géométriques sur ces opérateurs déterminent la forme de l'hypersurface dans l'espace ambiant.

Objets géométriques invariants

Soit *G* un groupe discret de présentation finie agissant fidèlement sur un **K**-fibré vectoriel E (avec **K** = **R** ou **C**) au-dessus d'une variété M (réelle ou complexe). Cette action en induit une sur l'espace E des sections (continues, différentiables, holomorphes…) de E et lui confère ainsi une structure de G-module.

Problème : *Calculer la cohomologie* H(G,E) *de G à valeurs dans le* G-*module* E.

L'espace H(G,E) est un *invariant* (de la classe de conjugaison) du système dynamique (M,G). Par exemple, si M est compacte, G = **Z** (situation à la fois riche et déjà compliquée) et E est le fibré trivial de fibre **R** ou **C**, le dual en degré 1 de H(G,E) est l'espace des *distributions* sur M *invariantes* par G (voir des exemples dans [1], [2] et [3]). Un survol là-dessus se trouve dans [4] ; il y est expliqué aussi le passage, dans certaines situations, du cas G discret à G groupe de Lie connexe, qui amène à des *systèmes dynamiques continus* (le dessin ci-dessous en est un exemple).



Le problème du « d-bar » pour les feuilletages complexes

Soit M une variété différentiable munie d'un *feuilletage complexe* (*i.e.* les feuilles supportent une structure complexe variant transversalement de façon différentiable ; un *feuilletage holomorphe* en est un cas particulier). On peut y définir un *complexe de Dolbeault le long des feuilles* et donc une *cohomologie de Dolbeault feuilletée.* Celle-ci apparaît comme l'obstruction à la résolution du problème du « d-bar » le long des feuilles.

Conjecture : *Supposons que le feuilletage est riemannien complet, que toute feuille est fermée et qu'elle est de Stein (elle admet un plongement holomorphe dans un espace numérique complexe). Alors la cohomologie de Dolbeault feuilletée est triviale.*

Des résultats collatéraux ont été obtenus là-dessus (*cf.* [5], [6], [7], [8] par exemple) mais la conjecture reste toujours ouverte.

Structures géométriques sur les espaces des polygones

Étude de feuilletages naturels en géométrie euclidienne plane, par exemple le *feuilletage aire-périmètre* sur l'espace des polygones (*cf.* [9]).

D'autres questions du genre sont étudiées. Celle posée par exemple aux deux exposés [10] (*Café mathématique* du CERAMATHS de l'UPHF et *Colloquium* de l'Université d'Artois) sur la *suite itérée des polygones des milieux* a été résolue (l'article est en cours de rédaction).